دراسة نهاية التوزيعات المستقرة لتوابع عشوائية مرتبطة من الشكل

$$Y_k(X_{k-1}, X_k)$$

ا.د. محمد جنيد العمر
جامعة حلب – كلية العلوم
قسم الإحصاء الرياضي

أ.م.د. خضر الكريدي
جامعة حلب – كلية العلوم
قسم الإحصاء الرياضي

الملخص

من المعلوم أن دراسة نهاية توزع المجموع لمتحولات عشوائية مستقلة تلعب الدور الأساسي في نظرية الاحتمالات وبالأخص عندما تطبق بشروط التوزيعات المستقرة ولقد لعب العلماء أمثال كلماغوروف وكيندينكو وشيرنكوف وغيرهم دورا بارزا في تطوير هذا المفهوم من خلال أبحاث علمية كثيرة وذات تطبيقات عملية وهامة جدا في مجال تكنولوجيا العلوم بمختلف أشكالها الاقتصادية والاجتماعية والصناعية والزراعية وفي مجال الاتصالات أما في أواخر القرن الماضي وبدايات القرن الحاضر لقد تم تعميم أهم النظريات في هذا المجال وذلك من أجل التوابع العشوائية المرتبطة وذات متحولين وذات ثلاثة متحولات ومن هذه النظريات التي تم تعميمها [نظرية النهايات المركزية-نظرية كانتلي– نظرية دارلنغ– نظرية تشيبتشيف وغيرها ...

(للدكتور محمد جنيد العمر)

أما في هذا البحث سوف نقوم بتعميم إحدى أهم النظريات الخاصة بالمتحولات العشوائية المستقلة بحيث يمكن تطبيقها على توابع عشوائية مرتبطة من الشكل $Y_k(X_{k-1}, X_k)$

الكلمات المفتاحية: توزيعات مستقرة، توابع عشوائية مرتبطة، تحويل لابلاس

مقدمة:

لتكن $\cdots ,X_1,X_2,\cdots,X_n$ متتالية متحولات عشوائية مستقلة وذات توزعات متماثلة ومعرفة في الفضاء المجرد والمقيس (E,W) وتوزع كل منها هو:

$$q(A)=P(X_k \in A), A \in W, k=0,1,2,\cdots$$

لنأخذ المجموع

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} X_k$$

حيث :

$$X_k \geq 0, k=0,1,2,\cdots$$

ولنرمز بـ $q(x)=P(X_k<x)$ لتابع التوزيع لمتحول العشوائي X_k كما نرمز لتحويل لابلاس الموافق له بالرمز $\varphi(\lambda)$ أي أن :

$$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dq(x)$$

تعريف: نقول عن التابع $L(x)$ الموجب والمعرف في المجال $(0,\infty)$ بأنه متغير ببطء في اللانهاية فيما إذا كان من أجل كل قيمة لـ x

$$\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1, \quad t \to \infty$$

ويقال أحيانا أن $L(x)$ تابع متغير ببطء في المبدأ (الصفر) فيما إذا كان

$$\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1, \quad t \to 0$$

نظرية 1:

إذا كان: $1-\varphi(\lambda) \sim \lambda^{\alpha} \cdot L(\frac{1}{\lambda})$

حيث : $L(\frac{1}{\lambda})$ تابع متغير ببطيء عندما $\lambda \to 0$ و $0 < \alpha < 1$

فإن :

$$P(\frac{S_n}{a_n} < x) \to G_{\alpha}(x), n \to \infty, x > 0$$

حيث:

$$n a_n^{-\alpha} L(a_n) \to 1, a_n \to \infty \text{ عندما } n \to \infty$$

و $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dG_{\alpha}(x) = e^{-\lambda^{\alpha}}$

انظر المرجع[1]

نظرية 2:

إذا كان : $n[1-\varphi(\lambda)] \to g(\lambda)$ عندما $n \to \infty$

فإن:

$$Ee^{-\lambda S_n} \to e^{-g(\lambda)} \text{ عندما } n \to \infty$$

انظر المرجع[1] و [9]

في الحقيقة لقد تم تعميم النظرية الأولى من أجل متتالية توابع عشوائية مستقلة

$$Y_1(X_0,X_1),Y_2(X_1,X_2),\cdots,Y_k(X_{k-1},X_k),\cdots,Y_n(X_{n-1},X_n),\cdots$$

وذات توزيعات متماثلة ومعرفة في الفضاء المجرد والمقيس $(E,W\times W)$ ومتعلقة بـ x,y

لنأخذ المجموع

$$\overline{S_n}=\sum_{k=1}^{n}Y_k(X_{k-1},X_k)$$

حيث:

$$Y_k(X_{k-1},X_k)\geq 0, k=1,2,\cdots$$

لنرمز بـ $F(u;x,y)$ لتابع التوزيع للتابع العشوائي $Y_k(X_{k-1},X_k)$ أي أن:

$$F(u;x,y)=P[Y_k(x,y)<u]$$

وبالتالي نحصل على

$$F(u)=\int_E\int_E F(u;x,y)q(dx)q(dy)$$

$$F(u;x)=\int_E F(u;x,y)q(dy)$$

فتكون تحويلات لابلاس الموافقة لها هي:

$$\Phi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda u}dF(u)$$

$$\Phi(\lambda;x)=\int_0^\infty e^{-\lambda u}dF(u;x)$$

انظر المرجع[1] و [2]و [10]

نظرية 3

إذا كان :

-1 $1-\Phi(\lambda)\sim\lambda^{\alpha}\cdot L(\frac{1}{\lambda})$

حيث $L(\frac{1}{\lambda})$ تابع متغير ببطئ عندما $0\to\lambda$ و $0<\alpha<1$

-2 $\underset{x}{Sup}[1-\Phi(\lambda;x)]\to 0$ عندما $\lambda\to 0$

فإن:

$$P(\frac{\overline{S_n}}{B_n}<u)\to\overline{G_\alpha}(u), n\to\infty, u>0$$

حيث:

$nB_n^{-\alpha}L(B_n)\to 1, B_n\to\infty$ عندما $n\to\infty$

و

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u}d\overline{G_\alpha}(u)=e^{-\lambda^{\alpha}}$$

انظر المرجع[3] [4] [5]

البحث

سوف نقوم الآن بتعميم النظرية الثانية بهدف دراسة نهاية التوزيعات المستقرة لتوابع عشوائية مرتبطة من الشكل $Y_k(X_{k-1}, X_k)$

نظرية اساسية:

إذا كان

-1 $n[1-\Phi(\lambda)] \to g(\lambda)$ عندما $n \to \infty$

-2 $\underset{x}{Sup}[1-\Phi(\lambda;x)] \to 0$ عندما $\lambda \to 0$

فإن :

$Ee^{-\lambda S_n} \to e^{-g(\lambda)}$ عندما $n \to \infty$

البرهان:

إن $\overline{S_n}$ يمثل مجموع توابع عشوائية مرتبطة بالمتحول x وبالتالي يمكن كتابته بالشكل التالي

$$
\begin{aligned}
&\overline{S_n} = [Y_1(X_0, X_1) + Y_2(X_1, X_2) + \cdots + Y_{m-1}(X_{m-2}, X_{m-1})] + \\
&+[Y_{m+1}(X_m, X_{m+1}) + \cdots + Y_{2m-1}(X_{2m-2}, X_{2m-1})] + \\
&+[Y_{2m+1}(X_{2m}, X_{2m+1}) + \cdots + Y_{3m-1}(X_{3m-2}, X_{3m-1})] + \\
&+\cdots \\
&\vdots \\
&+Y_m(X_{m-1}, X_m) + Y_{2m}(X_{2m-1}, X_{2m}) + Y_{3m}(X_{3m-1}, X_{3m}) + \cdots = \\
&= \overline{S'_{n,m}} + \overline{S''_{n,m}} + \overline{S^0_{n,m}}
\end{aligned}
$$

حيث :

$$\overline{S'_{n,m}} = \sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]} [S_{im-1} - \overline{S}_{(i-1)m}], i = 1, 2, \cdots, [\frac{n}{m}]$$

و

$$\overline{S''_{n,m}} = \sum_{i=1}^{[\frac{n}{m}]} Y_{i_{m-1}} (X_{jm-1}, X_{jm}], j = 1, 2, \cdots, [\frac{n}{m}]$$

و

$$\overline{S^0_{n,m}} = \overline{S_n} - (\overline{S'_{n,m}} + \overline{S'_{n,m}})$$

لندرس أولاً توزع المجموع $\overline{S'_{n,m}}$ الذي يمثل مجموع توابع عشوائية مستقلة كل منها من الشكل $(\overline{S_{im-1}} - \overline{S_{(i-1)m}})$

نلاحظ من صيغة تابع التوزع للتابع العشوائي $Y_k(X_{k-1}, X_k)$ أن :

$$F(u; x, y) = P[Y_k(x, y) < u]$$

أي أن:

$$F_m(u; x, y) = P[\overline{S_m}(X_0, X_m) < u \,|\, X_0 = x, X_m = y]$$

$$F_m(u; x) = \int_E F_m(u; x, y) q(dy)$$

$$F_m(u) = \int_E \int_E F_m(u; x, y) q(dx) q(dy)$$

وبالتالي تحويل لابلاس الموافق للتابع $F_m(u)$ هو :

$$\Phi_m(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} dF_m(u)$$

أما تحويلات لابلاس الموافقة للتابع $F_m(u;x)$ فهي :

$$\Phi_m(\lambda;x)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda u}dF_m(u;x)=$$

$$=\underbrace{\int\dots\int}_{m}\prod_{k=1}^{m}\Phi(\lambda;x_{k-1},x_k)q(dx_0)q(dx_1)\cdots q(dx_m)$$

حيث :

$$\Phi_m(\lambda;x_{k-1},x_k)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda u}dF_m(u;x_{k-1},x_k)$$

وبالاعتماد على مبدأ الاستقراء الرياضي يمكن البرهان بسهولة أن:

$$1-\Phi_m(\lambda)=m[1-\Phi(\lambda)]-0(1-\Phi(\lambda))$$

وذلك من خلال استخدام الشرط (2) من هذه النظرية وباستخدام الشرط الأول من هذه النظرية ينتج مباشرة أن:

$$(m-1)\frac{n}{m}[1-\Phi_{m-1}(\lambda)]\to\frac{m-1}{m}g(\lambda) \quad \text{عندما} \quad n\to\infty$$

وبالتالي يكون

$$(m-1)\frac{n}{m}[1-\Phi_{m-1}(\lambda)]\to\frac{m-1}{m}g(\lambda) \quad \text{عندما} \quad n\to\infty$$

وحسب نظرية الاستمرار المعروفة بنظرية الاحتمالات ينتج مباشرة أن :

$$P(\overline{S^{'}_{n,m}}<u)\to\overline{\overline{G_m}}(u),n\to\infty \qquad (1)$$

حيث: التابع $\overline{\overline{G_m}}$ هو توزع مستقر يمثل نهاية توزع المجموع $\overline{S^{'}_{n,m}}$ وهو غير

معلوم ولكن تحويل لابلاس له معلوم.

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u} d\overline{\overline{G}}_m(u) = e^{-\frac{m-1}{m}g(\lambda)} \xrightarrow[m\to\infty]{} e^{-g(\lambda)}$$

لندرس ثانيا توزع المجموع $\overline{S^{*}_{n,m}}$ نلاحظ من الشرط الأول من النظرية أن :

$$\frac{n}{m}[1-\Phi(\lambda)] \to \frac{1}{m}g(\lambda), n\to\infty$$

ينتج من ذلك أن :

$$Ee^{-\lambda\overline{S^{*}_{n,m}}} \to e^{-\frac{1}{m}g(\lambda)}, n\to\infty$$

وحسب نظرية الاستمرار المعروفة بنظرية الاحتمالات ينتج مباشرة أن

$$P(\overline{S^{*}_{n,m}} < u) \to \overline{\overline{G}}_m(u), n\to\infty \qquad (2)$$

حيث :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u} d\overline{\overline{G}}_m(u) = e^{-\frac{1}{m}g(\lambda)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

لندرس أخيرا توزع المجموع $\overline{S^{0}_{n,m}}$ نلاحظ أن هذا المجموع لا يحوي أكثر من m حدا وبالتالي :

$$P(\overline{S^{0}_{n,m}} > \varepsilon) \le m.P\{Y_1(X_0,X_1) > \frac{\varepsilon}{m}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (3)$$

هذا يعني أن المجموع $\overline{S^{0}_{n,m}}$ يسعى إلى الصفر بالاحتمال

إن المتراجحة التالية محققة انظر المرجع[4] و [5] و [6] و [7] وذلك من أجل أي متحولين عشوائيين ξ,η واي عددين حقيقيين $v>0, u>0$

$$P\{\xi < u - v\} - P\{|\eta| \ge v\} \le P\{\xi + \eta < u\} \le P\{\xi + \eta < u + v\} + P\{|\eta| \ge v\}$$

بالاعتماد على هذه المتراجحة المعروفة وباستخدام الرموز

$$\xi = \overline{S'_{n,m}}, \eta = \overline{S^{*}_{n,m}} + \overline{S^{0}_{n,m}}$$

يمكن أن نكتب

$$P\{\overline{S'_{n,m}} < u - v\} - P\{\overline{S^{*}_{n,m}} + \overline{S^{0}_{n,m}} \ge v\} \le P\{\overline{S_n} < u\} \le$$
$$\le P\{\overline{S'_{n,m}} < u + v\} + P\{\overline{S^{*}_{n,m}} + \overline{S^{0}_{n,m}} \ge v\}$$

وبالانتقال إلى النهايات عندما $n \to \infty$ وملاحظة العلاقات (1),(2),(3) ينتج مباشرة أن:

$$\overline{\overline{G}}_m(u-v) - [1 - \overline{\overline{G}}_m(v)] \le \liminf_{n\to\infty} P\{\overline{S}_n < u\} \le$$
$$\limsup_{n\to\infty} P\{\overline{S}_n < u\} \le \overline{\overline{G}}_m(u+v) + [1 - \overline{\overline{G}}_m(v)]$$

وبالانتقال إلى النهايات عندما $m \to \infty$ وبتثبيت u,v

وملاحظة أن:

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\overline{G}}_m(u) = G(u), n \to \infty$$

وحيث

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u} dG(u) = e^{-g(\lambda)}$$

ينتج مباشرة أن:

$$G(u-v) \le \liminf_{n\to\infty} P\{\overline{S}_n < u\} \le \limsup_{n\to\infty} P\{\overline{S}_n < u\} \le G(u+v)$$

وأخيرا من أجل $v \to 0$ نحصل على أن

$$G(u) \le \liminf_{n\to\infty} P\{\overline{S}_n < u\} \le \limsup_{n\to\infty} P\{\overline{S}_n < u\} \le G(u)$$

هذا يعني أن

$$P\{\overline{S}_n < u\} \to G(u), n \to \infty$$

وحسب نظرية الاستمرار في نظرية الاحتمالات ينتج أن

$$Ee^{-\lambda \overline{S}_n} \to e^{-g(\lambda)}, n \to \infty$$

وهو المطلوب

مثال تطبيقي:

لنفرض أن $\xi_n = \min(Y_1(X_0,X_1),Y_2(X_1,X_2),\cdots,Y_n(X_{n-1},X_n))$

يمثل عمر نظام بنائي مترابط بتوصيلة بين وحداته $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ والتي تملك توزع منتظم في المجال [0,1] أي أن $F(x)=x$ عندها إذا كان

$$P(\xi_n > x) = \overline{F^n}(x)$$

فإن

$$P(\frac{\xi_n - b_n}{a_n} > x) = P(\xi_n > a_n x + b_n) = \overline{F^n}(a_n x + b_n)$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{F^n}(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n = e^{-x}$$

حيث $a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = 0$

هذا يعني أن التوزع النهائي لعمر البناء بتوصيلة توالي مكون من وحدات توزعها منتظم في المجال $[0,1]$ هو توزع أسي وهو مهم للتنبؤ.

المقترحات والتوصيات:

نظرا لتطور نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي في السنوات الأخيرة تطوراً تسابقت فيه المراكز العلمية المختلفة من أجل تقدم العلوم وتحديثها بما يخدم حركة التطور الصناعي والتكنولوجي وحل القضايا العلمية والصناعية التي تهدف إلى ترسيخ الحلول المثلى أو التنبؤ عن الحالات المستقبلية من خلال توزيعات مستقرة نهائية لتوزع مجموع توابع عشوائية مرتبطة من الشكل $Y_k(X_{k-1}, X_k) \geq 0 \quad ; \quad k = 1,2,3,\cdots$
نقترح ونوصي بما يلي:

1- نوصي بأنه يمكن باستخدام نتائج هذا البحث في مجالات نظرية الخدمات ونظرية الموثوقية.

2- كما نوصي بأنه يمكن استخدام نتائج هذا البحث في حالة المتحولات العشوائية $X_1, X_2, \cdots, X_n$ تشكل سلسلة ماركوف المتجانسة مع ملاحظة وجوب إضافة شرط التقارب بانتظام التالي:

$$\sup_x [1-\varphi(\lambda, x)] \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$$

3- نقترح على طلاب الدراسات العليا والباحثين العمل على إمكانية تعميم هذا البحث من أجل توابع عشوائية مرتبطة من الشكل

$$Y_k(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k) \qquad ; k = 1,2,\cdots,n,\cdots$$

Abstract

This research aims to develop science to serve development in all science fields to give optimum solutions and prediction of future cases using stable infinite distributions of sum of correlated random functions that have the form:

$$Y_k(X_{k-1}, X_k)\ ;\ k=1, 2, 3, ..., n$$

That have similar distributions defined on the measured space (E, A ×A).

In this research, we expand limit theory class to include stable distributions law class.

We could generalize important theory in this field.

If, X_1, X_2, ..., X_n, are a sequence of independent random variables, that have a symmetric distributions defined on the measured space (E, A), and if we take:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad ; X_k \geq 0 \quad ; k = 1,2,...,n$$

And:

$$P(X_k \in A) = q(A)$$

And Laplace transform for it:

$$\varphi(\lambda) = E(e^{-\lambda X_k})$$

And if:

$$1 - \varphi(\lambda) \approx \lambda^{\alpha} L(\frac{1}{\lambda})$$

Where the function $L(\frac{1}{\lambda})$ varies slowly when $\lambda \to 0$, and $0 < \alpha < 1$

Then:

$$P(\frac{S_n}{a_n} < x) \to G_\alpha(x) \quad ;n \to \infty \quad ;x > 0$$

Where:

$$n\,a_n^{-\alpha} L(a_n) \to 1 \quad ;a_n \to \infty$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda X_t} dG_\alpha(x) = e^{-\lambda^\alpha}$$

Depending on all that, we generalize the following theory:

If we have correlated random functions:

$$Y_k(X_{x-1}, X_k)$$

And taking:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k(X_{k-1}, X_k), \quad ;Y_k(X_{k-1}, X_k) \geq 0$$

And if:

$$n[1 - \varphi(\lambda)] \to g(\lambda) \text{ when } n \to \infty$$

Then:

$$E(e^{-\lambda S_n}) \to e^{-g(\lambda)} \text{ when } n \to \infty$$

المراجع

[1] William Feller [1971]

An introduction to probability theory and it's applications. volume II .New York. London.

[2] B. V. Gnedenko [1976]

The theory of probability.(Mir Publishers Moscow)

[3] Jnaid. O. M. [1996]

تعميم نظرية النهايات المركزية لتوابع عشوائية مرتبطة من الشكل $Y_k(X_{k-1}, X_k) \geq 0$

International conference on statistics computer science Application-Cairo. Egypt, 21s,pp:1-7

[4] Jnaid. O. M., K. Ahmad[1996]

Variance of sum dependent random functions, conference mathematics three-Erbed-Jordan

[5] Jnaid. O. M. [1997]

تعميم نظرية تشيبتشيف لتوابع عشوائية مرتبطة من الشكل $Y_k(X_{k-1}, X_k) \geq 0$

International Conference for Statistics, Computer Science Scientific and Social Applications-Cairo-Egypt

[6] Jnaid. O. M., K. Ahmad[1966]

Theory Darlink $\lim_{n\to\infty} P\{\frac{S_n}{M_n} < x\}$, International Conference on Statistics. Computer Science Applications -Cairo-Egypt 21s,pp:6-11

[7] Aroro. S.[1993]

Introducing Probability and Statistics. New Delhi pp:373-392 and 561-571

[8] Gut, Allan [1995]

An intermediate course in probability Springer-verlag. New York

[9] Marco Lombardi [2004]

Simulation-based Estimation Methods for α-stable Distributions and Processes

[10] John, P. Nolan[2008]

Stable distributions models, for heavy tailed data. American university

[11] Mitsuhiro Kawasaki[2002] march 27,

The extended central limit theorem and the stable distributions.