# استخدام طريقة بييز في تقدير معلمات نماذج الانحدار اللاخطية

د.عبدو العبدالله

قسم العلوم الأساسية

كلية الهندسة الميكانيكية

جامعة حلب

## الملخص

درسنا في هذا البحث كيفية استخدام طريقة بييز في تقدير معلمات نماذج الانحدار اللاخطية بالاعتماد على توابع الكثافة الاحتمالية السابقة المرافقة الطبيعية وتوابع الكثافة الاحتمالية السابقة المعتمدة على العينات المتعاقبة.

إن استخدام طريقة بييز في التقدير عند توفر معلومات سابقة بوصفها تابع توزيع احتمالي سابق مرافقة طبيعية يعطي تقديرات للمعلمات أكثر واقعية من الطرق التقليدية.

و تم الحصول على العلاقتين :

$$E_{f(\sigma|Y^*)}(\sigma)=\frac{\Gamma\left(\frac{F-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{F}{2}\right)}\left(\frac{UF}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{f(\sigma|Y')}(\sigma)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-p}{2}\right)}\cdot\left(\frac{UF}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

لتقدير الانحراف المعياري للنموذج باستخدام طريقة بييز وحسب تابع الكثافة الاحتمالية السابقة المستخدمة.

الكلمات المفتاحية:انحدار لاخطي-انحراف معياري-بييز

**المقدمة:**

إن قيمة النتائج العلمية المستخرجة ترتبط بشكل مباشر بمدى دقة الأساليب والتجارب المستخدمة في موضوع الدراسة وصحتها، ولأجل وضع تلك الأساليب والتجارب بشكل يمكن معهُ الحصول على النتائج النهائية للتوصية، بشكل أكثر دقة ووضوحاً بفضل استخدام الأساليب الإحصائية الأكثر دقةً على أسس علمية تكون حصيلتها اتخاذ القرار العلمي بقناعة علمية وبثقة كافية.

إن التعرف على الأسس النظرية لهذا الفرع أو ذاك من علم الإحصاء يُتيح لنا استخدام هذا العلم في التطبيق العملي بشكلٍ واعٍ وفعالٍ وكما هو معلوم توجد مدرستان لتقدير معلمات نماذج الانحدار هما المدرسة التقليدية ومدرسة بييز، اعتمدت المدرسة الأولى على افتراض أن معلمات النموذج المراد تقديرها ثابتة، أما المدرسة الثانية فقد اعتمدت في عملها على افتراض أساسي مفادهُ أن المعلمات المراد تقديرها عبارة عن متغيرات عشوائية ومن ثم ضرورة الحصول على معلومات مسبقة عنها تؤخذ من النظرية خلف الظاهرة المدروسة أو من خلال التجارب السابقة ومن ثم صياغة هذه المعلومات بشكل توزيع احتمالي سابق ، لذلك فإن المعلمات المراد تقديرها تعتمد بشكل أساسي على نوع التوزيع الاحتمالي السابق فضلاً عن نوع تابع الخسارة المستخدمة، وعند دمج التوزيع الاحتمالي السابق بتابع الإمكان الأعظم للمشاهدات،وذلك بضرب تابع التوزيع الاحتمالي السابق للمعلمات $(\alpha)$ و$(\beta)$. بتابع الامكان الأعظم سنحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق المشترك للمعلمات $(\alpha,\beta)$ وسنفصل الكلام في هذا البحث عن كيفية استخدام طريقة بييز في تقدير معلمات نماذج الانحدار اللاخطية بالاعتماد على توابع الكثافة الاحتمالية السابقة المرافقة الطبيعية وتوابع الكثافة الاحتمالية السابقة المعتمدة على العينات المتعاقبة.

**أهمية البحث:** في الطريقة المستحدثة لتوظيف التوزيع الاحتمالي السابق الجديد في تقدير معلمات نماذج الانحدار اللاخطية مما يعطي البحث أهمية نظرية يمكن استثمارها وتوظيفها في الجانب العملي وخاصةً في التطبيقات الاقتصادية ونماذج

النمو التي تسلك الاتجاه اللاخطي والتي كثيراً ما تبتعد الطـرق الكلاسـيكية فـي الحصول على قيم تقديرية واقعية وصحيحة لها.

**نظرية بييز ومقدر بييز:**

في عام ١٧٦٣ ظهر رأيان مختلفان ليشكلا بداية مدرستين أو اتجاهين متضادين لتقييم نظرية بييز تأرجحا بين التأييد والمعارضة، ليستمر النقاش بين أصحاب هذين الاتجاهين ويتطور عبر السنين ليدعم كل اتجاه رأيه بالدليل والبرهان محاولاً تفنيد الرأي المقابل، ولقد سوّغ أصحاب مدرسة بييز المتناول في هذا البحث اتجاههم هذا بأن الاعتماد على معلومات العينة يُعد غير كافٍ لعمل التحليلات الإحصائية ومن ثم ضرورة الاعتماد على افتراض أساسي يتلخص بكون المعلمات المراد تقديرها عبارة عن متغيرات عشوائية يتطلب الحصول على معلومات مسبقة عنها تؤخذ من النظرية خلف الظاهرة أو بالاعتماد على التجارب السابقة حول الظاهرة المدروسـة وبالتالي صـياغة هذه المعلومات المسبقة بشـكل توزيع احتمـالي سـابق.

وفي الاتجاه الآخر فإن المأخذ على مدرسة بييز يكمن في صعوبة تحديد التوزيع الاحتمالي السابق بشكل دقيق لصعوبة الحصول على المعلومات المسبقة أو لعدم دقة هذه المعلومات. وتحت افتراض أن $[\underline{Y}']$ متجه لـ $(n)$ من المشاهدات التي لها توزيع احتمالي $[f(\underline{Y}|\underline{\theta})]$ يعتمد على قيم $(p)$ من المعلمات $[\underline{\theta}']$ ولنفترض أن $(\underline{\theta})$ لها توزيع احتمالي $[f(\underline{\theta})]$، وبوجود البيانات المشاهدة $(\underline{Y})$ فإن التوزيع الشرطي لـ $(\theta)$ يكون:

$$f(\underline{\theta}|\underline{Y})=\frac{f(Y|\underline{\theta})f(\underline{\theta})}{f(Y)} \qquad (1)$$

إذ إن $f(\underline{Y})\neq 0$ ، وإن:

$$f(\underline{Y})=E\left[f(\underline{Y}|\underline{\theta})\right]=\begin{cases}\int_{\forall\underline{\theta}} f(\underline{Y}|\underline{\theta})f(\underline{\theta})d\underline{\theta} & ,\text{if } \theta \text{ continuous}\\ \sum_{\forall\underline{\theta}} f(\underline{Y}|\underline{\theta})f(\underline{\theta}) & ,\text{if } \theta \text{ discrete}\end{cases} \qquad (2)$$

العلاقة (1) عادة ما يشار إليها بنظرية بييز والتي فيها [$f(\underline{\theta})$] يمثل التوزيع السابق لــ ($\underline{\theta}$) وهو تابع احتمالي يعبر عن مدى معرفتنا حول معلمات ($\underline{\theta}$)، والتي تسبق العينة المشاهدة للمتغير العشوائي ($\underline{Y}$) والذي يمتلك تابع توزيع [$f(\underline{Y}|\underline{\theta})$] يعتمد على ($\underline{\theta}$)، وأن [$f(\underline{\theta}|\underline{Y})$] يمثل التوزيع اللاحق لــ ($\underline{\theta}$) بوجود ($\underline{Y}$) (Posterior Distribution)، وهو تابع شرطي لمجال ($\underline{\theta}$) بوجود قيم العينة، أما [$f(\underline{Y})$] فيمثل تابع توزيع حدي لــ ($\underline{Y}$) وهو ثابت ضروري لجعل التكامل أو المجموع للتوزيع اللاحق [$f(\underline{\theta} \mid \underline{Y})$] مساوي للواحد.

ويمكن تعريف مقدر بييز لأي معلمة غير معرفة ($\theta$) بأنه القيمة($\hat{\theta}$) التـــي تصغر القيمة المتوقعة لتابع الخسارة $\left\{E\left[\ell\left(\hat{\theta};\theta\right)\right]\right\}$ بالنسبة للتوزيع اللاحق للمعلمة ($\theta$) [4] ، وبالاعتماد على تابع خسارة مربع الخطأ$\ell\left(\hat{\theta};\theta\right)$ [5]،فإن مقدر بييز$\left(\hat{\theta}\right)$ للمعلمة المجهولة ($\theta$) هو الوسط الحسابي للتوزيع اللاحق لهذه المعلمة وكما يأتي:

$$E_{f(\theta/Y)}\ell\left(\hat{\theta};\theta\right)=E_{f(\theta/Y)}\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2$$

$$=\hat{\theta}^2-2\hat{\theta}\quad E_{f(\theta/Y)}(\theta)+E_{f(\theta/Y)}(\theta)^2$$

$$\frac{\partial E\left[\ell\left(\hat{\theta};\theta\right)\right]}{\partial\hat{\theta}}=2\hat{\theta}-2E_{f(\theta/Y)}(\theta)+0$$

وبعد مساواة المشتقة أعلاه بالصفر، نجد أن مقدر بييز هو :

$$\hat{\theta}=E_{f(\theta/Y)}(\theta) \qquad (3)$$

**تقدير معلمات نماذج الانحدار غير الخطية باستخدام طريقة بييز:**

لنفترض أن لدينا النموذج غير الخطي المتعدد الآتي:

$$\underline{Y}=f\left(\underline{X}_1,\underline{X}_2,\ldots,\underline{X}_k,\ \theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p\right)+\underline{\varepsilon} \qquad (4)$$

إذ إن:$\underline{Y}$ : يمثل متجه المتغير المعتمد من مرتبة ($n \times 1$)

$\underline{X}_k$ و ... و $\underline{X}_2$ و $\underline{X}_1$ : تمثل متجهات المتغيرات المستقلة من مرتبة ($n \times k$)

$\theta_p$ و ... و $\theta_2$ و $\theta_1$ : تمثل معلمات النموذج.

$\underline{\varepsilon}$ : يمثل متجه الأخطاء العشوائية من مرتبة ($n \times 1$)

وإذا وضعنا: $\underline{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right)^T$ و $\underline{\theta} = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p\right)^T$

فيمكن اختصار النموذج الموضح في العلاقة (4) كالآتي:

$$\underline{Y} = f(\underline{X} ; \underline{\theta}) + \underline{\varepsilon} \qquad (5)$$

وإن:

$$E(\underline{Y}) = f(\underline{X} ; \underline{\theta})$$

إذ افترضنا إن $[E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}]$، وتحت افتراض أن الأخطاء العشوائية غير مرتبطة وإن $\left[\mathrm{var}(\varepsilon) = \sigma^2_{In}\right]$ فيكون $[\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2{}_{In})]$، من هنا فإن المشاهدة ( i ) للمتغير المعتمد يمكن أن تكتب كالآتي:

$$Y_i = f(\underline{X}_i ; \underline{\theta}) + \varepsilon_i \quad ; i = 1, 2, \ldots, n \qquad (6)$$

بالاعتماد على مفكوك سلسلة تايلر لـ $f(\underline{X}_i, \underline{\theta})$ عند النقطة $(\underline{\theta}_0)$ حيث إن:

$$\underline{\theta}_0 = \left(\theta_{10}, \theta_{20}, \ldots, \theta_{p0}\right)^T$$

وتقريب هذه السلسلة وذلك بحذف الحدود التي تحتوي على المشتقات الجزئية الأعلى من الدرجة الأولى نحصل على[7]:

$$f(\underline{X}_i, \underline{\theta}) = f(\underline{X}_i, \underline{\theta}_0) + \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{\partial f(\underline{X}_i ; \underline{\theta})}{\partial \theta_j}\right]_{\theta = \theta_0} (\theta_j - \theta_{j0}) \qquad (7)$$

فإذا فرضنا: $f_i^0 = f(\underline{X}_i, \underline{\theta}_0)$ ، $\beta_j^0 = \theta_j - \theta_{j0}$

$$Z_{ij}^0 = \left[\frac{\partial f(\underline{X}_i ; \underline{\theta})}{\partial \theta_j}\right]_{\theta = \theta_0}$$

فإن العلاقة (6) تصبح بالشكل الآتي:

$$Y_i = f_i^0 + \sum_{j=1}^{p} Z_{ij}^0 \beta_j^0 + \varepsilon_i$$

لذلك فإن: $Y_i - f_i^0 = \sum_{j=1}^{p} Z_{ij}^0 \beta_j^0 + \varepsilon_i$ حيث إن: $\underline{Y}^* = Y_i - f_i^0$

وبطريقة المصفوفات يمكن إعادة كتابة النموذج السابق كالآتي:

$$\underline{Y}^* = Z^0 \underline{\beta}^0 + \underline{\varepsilon} \qquad (8)$$

حيث إن $\left(Z^{\theta}\right)$ مصفوفة من المرتبة $(n \times p)$.

وباستخدام طريقة بييز يمكن تقدير معلمات النموذج الخطي الموضح في العلاقة (8)، وعلى افتراض أن متجه الأخطاء العشوائية $(\varepsilon)$ يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسيط $(\underline{0})$ ومصفوفة تباين – تباين مشترك $\left(\sigma^2_{I_n}\right)$ مع ملاحظة أن المتغيرات المستقلة $\left(Z^{\theta}\right)$ تتوزع بشكل مستقل عن $(\varepsilon)$، فإن تابع الكثافة الاحتمالية لـ $\left(\underline{Y}^*\right)$ يأخذ الشكل الآتي:

$$L\left(\underline{Y}^* \mid \underline{\beta}, \sigma\right) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\underline{Y}^* - Z\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}^* - Z\underline{\beta}\right)\right]$$

ويكتب بشكل تناسبي كالآتي:

$$L\left(\underline{Y}^* / \underline{\beta}, \sigma\right) \propto \frac{1}{\sigma^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[v\hat{\sigma}^2 + \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}\right)' Z'Z\left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}\right)\right]\right\} \quad (9)$$

إذ إن: $(v = n - p)$ وإن:

$$\hat{\beta} = (Z'Z)^{-1} Z'\underline{Y}^* \quad , \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underline{Y}^* - Z\hat{\underline{\beta}}\right)'\left(\underline{Y}^* - Z\hat{\underline{\beta}}\right)}{v}$$

والتي تمثل تقديرات المربعات الصغرى للمعلمتين $(\sigma, \underline{\beta})$، وللحصول على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة التي عن طريقها نستخرج مقدر بييز يستوجب معرفة الحالات الخاصة بتابع الكثافة الاحتمالية السابقة التي تعتمد على نوع المعلومات المسبقة المتوفرة ، من هنا فإن تحديد نوع تابع الكثافة الاحتمالية السابقة يُعد من المواضع المهمة في دراسة تقدير المعلمات وفق طريقة بييز ، وحيث إن هذه الدراسة مخصصة لدراسة نوع محدد من هذه التوابع، لذلك سنتطرق لهذه التوابع فقط، وكما يأتي:

**أولاً: تابع كثافة احتمالية سابقة مرافقة طبيعية**

إن هذا النوع من التوزيعات السابقة يمتلك تابع كثافة احتمالية ملائمة تُفترض بالاعتماد على المعلومات المتوفرة حول المعلمات المراد تقديرها، والأمر المهم الذي يجب أن نشير إليه هنا أن تابع التوزيع الاحتمالي اللاحق الذي نحصل عليه بالاعتماد على تابع التوزيع الاحتمالي السابق المرافقة الطبيعية يكون مشابه

لتابع التوزيع السابق مع ملاحظة اختلاف المعلمات في كلا التوزيعين[2]، فبالنسبة لمعلمات النموذج الخطي المتعدد الموضح في العلاقة (8) نميز الحالات:

**١- عندما تكون ($\sigma^2$) معلومة:**

تابع الكثافة الاحتمالية السابقة المرافقة الطبيعية لمتجه المعلمات ($\underline{\beta}$) سيأخذ شكل التوزيع الطبيعي وكما يأتي:

$$f(\underline{\beta}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 Q}\left[\left(\underline{\beta}-\underline{\bar{\beta}}\right)' Q^{-1}\left(\underline{\beta}-\underline{\bar{\beta}}\right)\right]\right\} \quad , \quad \begin{array}{c} -\infty < \beta < \infty \\ 0 < \sigma < \infty \end{array} \qquad (10)$$

إذ إن: $\underline{\bar{\beta}}$ : يمثل متجه المتوسطات للمعلمات ($\underline{\beta}$) من مرتبة ($p\times1$)

$\sigma^2 Q$ : تمثل مصفوفة التباين – التباين المشترك لمتجه المعلمات ($\underline{\beta}$) من مرتبة ($p\times p$) وأن ($Q$) مصفوفة محددة موجبة.

تابع الإمكان لنموذج الانحدار الخطي المتعدد الموضح في العلاقة (8) سيأخذ الشكل الآتي:

$$L\left(\underline{Y}^{*} / \underline{\beta},\sigma\right) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}\right)' Z'Z\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}\right)\right]\right\} \quad (11)$$

وباستخدام صيغة بييز نحصل على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة الحدية لمتجه المعلمات ($\underline{\beta}$) وهو:

$$f(\underline{\beta} \mid \underline{Y}^{*},\sigma) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}\right)' Z'Z\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}\right)+\left(\underline{\beta}-\underline{\bar{\beta}}\right)' Q^{-1}\left(\underline{\beta}-\underline{\bar{\beta}}\right)\right]\right\} \quad (12)$$

والعلاقة الأخيرة (12) تمثل تابع توزيع طبيعي حيث أن تابع التوزيع اللاحق يكون مشابه لتابع التوزيع السابق في حالة استخدام تابع كثافة احتمالية سابقة مرافقة طبيعية.

إن مقدرات بييز للمعلمات ($\underline{\beta}$) بالاعتماد على تابع خسارة تربيعية للنموذج الخطي المتعدد الموضح في العلاقة (8) ستكون الوسط الحسابي للتوزيع اللاحق للمعلمات وهو[2]:

$$\overline{\overline{\underline{\beta}}} = \left(Z'Z + Q^{-1}\right)^{-1}\left(Q^{-1}\overline{\underline{\beta}} + Z'\underline{Y}^{*}\right) \qquad (13)$$

والعلاقة (13) توضح أن الوسط الحسابي للتوزيع اللاحق ما هو إلا توزيع موزون لمقدرات المربعات الصغرى لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ .

وبما أن $(\beta_j^0)$ يمكن التعبير عنها بالعلاقة: $\beta_j^0 = \theta_j - \theta_{j0}$، لـذلك فـإن القيمة التقديرية لها تكون:

$$\overline{\overline{\beta}}_j^{\,0} = \theta_j - \theta_{j0} \qquad (14)$$

من المعادلة الأخيرة يمكن اسـتخراج قيمـة $\left(\hat{\theta}_j^{(1)}\right)$ $(j = 1, 2, \dots, p)$ والتي تمثل تقدير بييز لـ $(\theta_j)$ عند التكرار الأول، وللوصول إلى أفضل تقدير إلى $(\underline{\theta})$ فإن قيم بييز التقديرية لـ $(\theta_j)$ عند التكرار الأول نضعها بدل القيم التقديريـة الأولية لـ $(\theta_{j0})$ ونقوم بإجراء العمليات نفسها الموضحة سابقاً، وهـذه العمليـات ستقودنا إلى إيجاد مجموعة ثانية من تقديرات بييز $\left(\hat{\theta}_j^{(2)}\right)$....، وتقـديرات بييـز بشكل عام يمكن إعادة كتابتها كمتجه بالشكل الآتي:

$$\hat{\underline{\theta}}^{(K+1)} = \hat{\underline{\theta}}^{(k)} + \underline{b}^{k} \qquad (15)$$

حيث إن: $\underline{b}^{k}$ متجه من المرتبة $(k \times 1)$.

وتستمر عمليات التكرار هذه حتى نصل إلى التقديرات المتقاربـة ، والتـي تمثـل تقديرات بييز للمعلمات $(\underline{\theta})$ للنموذج غير الخطي الموضح في العلاقة (5).

**٢- عندما تكون $(\sigma^2)$ غير معلومة:**

في هـذه الحالة نلجأ إلى استخدام تابع كثافة احتمالية سابقة لـــ $(\sigma, \underline{\beta})$، وتعد أشهر توابع الكثافة الاحتمالية المرافقة الطبيعية السابقة استخداماً هو التوزيـع (Normal – Gamma) ، فعند افتراض نمـوذج الانحـدار الخــطي المتعـدد الموضح في العلاقة (8) وأن $(\sigma)$ تتوزع وفق معكوس غاما [8]الذي يأخذ الشـكل الآتي:

$$f(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma^{(a+1)}} \exp\left(\frac{-a\hat{\sigma}^2}{2\sigma^2}\right) \quad , \quad 0 < \sigma < \infty, \; a > 0 \qquad (16)$$

يتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات $(\underline{\beta})$ومتجه المعلمات:

$$f(\underline{\beta}/\sigma)\propto \frac{1}{\sigma^{p}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left[(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}})'Q^{-1}(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}})\right]\right\},-\infty<\underline{\beta}<\infty \quad (17)$$

فإن التوزيع السابق للمعلمات ($\underline{\beta}$) و ($\sigma$) يمكن الحصول عليه بسهولة بضرب الصيغتين (16) و (17) كالآتي:

$$f(\underline{\beta},\sigma)\propto \frac{1}{\sigma^{(p+a+1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left[a\hat{\sigma}^{2}+(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}})'Q^{-1}(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}})\right]\right\} \quad (18)$$

وبضرب العلاقة (18) بتابع الإمكان الموضحة في العلاقة (11) نحصل على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة للمعلمات ($\sigma, \underline{\beta}$) وهي:

$$f(\underline{\beta},\sigma\mid \underline{Y}^{*})\propto \frac{1}{\sigma^{(n+p+a+1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\begin{bmatrix}a\hat{\sigma}^{2}+(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}})'Q^{-1}(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}})+\\+(\underline{Y}^{*}-Z\underline{\beta})'(\underline{Y}^{*}-Z\underline{\beta})\end{bmatrix}\right\} \quad (19)$$

حيث إن: $\underline{Y}^{*}=Z^{0}\underline{\beta}^{0}+\underline{\varepsilon}$ .

وبأخذ التكامل على طرفي العلاقة (19) بالنسبة إلى حدود ($\sigma$) نحصل على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة لمتجه المعلمات($\underline{\beta}$) هو [6]:

$$f(\underline{\beta}\mid \underline{Y}^{*})\propto\left[1+(\underline{\beta}-\underline{E})'\frac{\beta^{*}}{M}(\underline{\beta}-\underline{E})\right]^{-\left(\frac{n+p+a}{2}\right)} \quad (20)$$

إذ إن:

$$\beta^{*}=Z'Z+Q^{-1}$$
$$M=\left(\underline{Y}^{*'}\underline{Y}^{*}+a\hat{\sigma}^{2}+\overline{\underline{\beta}}'Q^{-1}\overline{\underline{\beta}}\right)-\underline{E}'\beta^{*}\underline{E}$$

والعلاقة (20) هي تابع كثافة احتمالية لتوزيع t- متعدد المتغيرات و بدرجة حرية $(n+a)$ وبوسيط $(\underline{E})$ الذي يمثل تقدير بييز لمتجه المعلمات($\underline{\beta}$) باعتماد تابع خسارة تربيعية بالنسبة للنموذج الموضح في العلاقة (8)، أي إن مقدر بييز يأخذ العلاقة الآتية:

$$\underline{E}=(Z'Z+Q^{-1})^{-1}(Q^{-1}\overline{\underline{\beta}}+Z'\underline{Y}^{*}) \quad (21)$$

وبإضافة التقديرات التي نحصل عليها حسب العلاقة (21) إلى التقـديرات الأولية نحصل على مقدرات بييز لمتجه المعلمات ($\underline{\theta}$) بالنسبة للنموذج غير الخطي المتعدد الموضح في العلاقة (5)، وللحصول على التقديرات النهائية لـ ($\underline{\theta}$) نُجري نفس عملية التكرار الموضحة سابقاً.

وللحصول على تقديرات بييز للمعلمة ($\sigma$) نأخذ التكامـل علـى طرفـي العلاقة (19) بالنسبة إلى حدود متجه المعلمات ($\underline{\beta}$) لنحصل علـى تـابع الكثافـة الاحتمالية اللاحقة الحدية للمعلمة ($\sigma$) وهي:

$$f\left(\sigma \mid \underline{Y}'\right)=\frac{2}{\sigma^{(F+1)}\Gamma\left(\frac{F}{2}\right)}\left(\frac{UF}{2}\right)^{\frac{F}{2}}\exp\left(\frac{-UF}{2}\right) \quad , \quad 0<\sigma<\infty \qquad (22)$$

حيث إن: $UF$ هي معلمة توزيع معكوس غاما لـ $\sigma$.

والعلاقة (22) تمثل توزيع معكوس غاما، وبالتالي فان تقدير بييز للمعلمة ($\sigma$) باعتماد تابع خسارة تربيعية هو المتوسط لتوزيع معكوس غاما المبين في العلاقة (22) أي:

$$E_{f(\sigma|Y')}(\sigma)=\frac{\Gamma\left(\frac{F-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{F}{2}\right)}\left(\frac{UF}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (23)$$

وكحالة أخرى عندما نمتلك معلومات نظرية متواضعة حول المعلمـة ($\sigma$) والمتمثلة بالحدود الدنيا والعليا، من هنا يمكن استخدام القاعدة الثانية وبمجال مقيـد للمعلمة ($\sigma$) أي سيكون لدينا التوزيع الآتي [1]:

$$f(\sigma)\propto\frac{1}{\sigma} \qquad , \sigma>0 \qquad (24)$$

إذ أن متجه المعلمات ($\underline{\beta}$) يتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات كما في العلاقة (17)، من هنا فان التوزيع السابق للمعلمات ($\sigma$ , $\underline{\beta}$) بعد ضرب الصيغتين (24) و (17) سيأخذ الشكل الآتي:

$$f(\underline{\beta},\sigma)\propto\frac{1}{\sigma^{(p+1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left[(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}})'\,Q^{-1}\,(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}})\right]\right\} \qquad (25)$$

وبضرب العلاقة (25) مع تابع الإمكان الموضح حسب العلاقة (11) نحصل على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة للمعلمات $(\underline{\beta},\sigma)$ وهو:

$$f(\underline{\beta},\sigma\mid\underline{Y}^{*})\propto\frac{1}{\sigma^{(n+p+1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\begin{bmatrix}(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}})'\,Q^{-1}(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}})+\\+(\underline{Y}^{*}-Z\underline{\beta})'(\underline{Y}^{*}-Z\underline{\beta})\end{bmatrix}\right\} \qquad (26)$$

يمكن الحصول على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ بأخذ التكامل على طرفي العلاقة (23) بالنسبة إلى حدود $(\sigma)$ وهو [*]:

$$f(\underline{\beta}\mid\underline{Y}^{*})\propto\left[1+(\underline{\beta}-\underline{E})'\frac{\beta^{*}}{M}(\underline{\beta}-\underline{E})\right]^{-\frac{(n+p)}{2}} \qquad (27)$$

إذ إن:

$$\beta^{*}=\left(Z'Z+Q^{-1}\right)$$

$$M=\left(\underline{Y}^{*'}\underline{Y}^{*}+\overline{\underline{\beta}}\,Q^{-1}\,\overline{\underline{\beta}}\right)-\underline{E}'\,\beta^{*}\,\underline{E}$$

والعلاقة (27) هي تابع كثافة احتمالية تمثل توزيع t – متعدد المتغيرات بدرجة حرية (n) وبمتجه الأوساط $(\underline{E})$ الذي يمثل تقديرات بييز بالنسبة لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ باعتماد تابع خسارة تربيعية أي:

$$\underline{E}=\left(Z'Z+Q^{-1}\right)^{-1}\left(Q^{-1}\,\overline{\underline{\beta}}+Z'\,\underline{Y}^{*}\right) \qquad (28)$$

التقديرات التي نحصل عليها من العلاقة (28) تضاف إلى التقديرات الأولية لنحصل على تقديرات بييز للنموذج غير الخطي المتعدد الموضح في العلاقة (5) بالنسبة لمتجه المعلمات $(\underline{\theta})$ باعتماد تابع خسارة تربيعية، وبالاعتماد على عملية التكرار نصل إلى التقديرات النهائية لـ $(\underline{\theta})$.

وللحصول على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة الحدية للمعلمة $(\sigma)$ نكامل

---

[*] يتم الحصول على العلاقة (27) بإتباع نفس الخطوات التي حصلنا من خلالها على العلاقة (20) ولكن بوضع صفر محل كل (a).

العلاقة (26) بالنسبة إلى حدود متجه المعلمات $(\underline{\beta})$ لنحصل على:

$$f\left(\sigma \mid \underline{Y}^*\right)=\frac{2}{\sigma^{(n+1)}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\text{un}}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{-\text{un}}{2\sigma^2}\right) \quad , \quad 0<\sigma<\infty \qquad (29)$$ حيث

حيث إن: $un$ هي معلمة توزيع معكوس غاما لـ $\sigma$ .

والعلاقة (29) هي توزيع غاما المعكوس، ومن ثم فان مقدر بييز للمعلمة (σ) باعتماد تابع خسارة تربيعية سيكون المتوسط لهذا التوزيع أي(**):

$$E_{f(\sigma|Y^*)}(\sigma)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(\frac{\text{un}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (30)$$

**ثانياً: تابع كثافة احتمالية سابقة بالاعتماد على العينات المتعاقبة:**

عندما تكون المعلومات المتوافرة حول المعلمات المراد تقديرها قليلة جداً بحيث لا تفي بالغرض ففي هذه الحالة يفضل الحصول على معلومات إضافية من تجربة أو تجارب سابقة أو حالية ومن ثم تسخير هذه المعلومات بعد صياغتها كتابع توزيع احتمالي سابقة معلوماتية مع المعلومات التي نحصل عليها من التجربة تحت البحث والتي تكون بصيغة تابع الإمكان من أجل الحصول على توزيع ملائم يمكن من خلاله الحصول على مقدرات بييز للمعلمات المراد تقديرها، وإذا رمزنا لمشاهدات العينة من التجربة السابقة بـ $(\underline{Y}_1^*, Z_1)$ ولحجم العينة السابقة بـ $(n_1)$، ولمشاهدات العينة من التجربة تحت البحث بـ $(\underline{Y}_2^*, Z_2)$، ولحجم العينة تحت البحث $(n_2)$، يكون تابع الكثافة الاحتمالية السابقة للمعلمات $(\sigma_1, \underline{\beta})$ كالآتي[2]:

$$f\left(\underline{\beta},\sigma_1 \mid \underline{Y}_1^*\right)\propto\frac{1}{\sigma_1^{(n+1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left[v_1\hat{\sigma}_1^2+\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_1\right)' Z_1' Z_1\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_1\right)\right]\right\} \qquad (31)$$

إذ إن $(v_1 = n_1 - p)$،وإن العلاقة (31) تمثل تابع كثافة احتمالية سابقة لمعلمات

(**) يتم الحصول على الصيغتين (29) و (30) باتباع الخطوات نفسها التي من خلالها حصلنا على الصيغتين (22) و (23) ولكن بوضع صفر محل كل (a).

العينة المدروسة التي لها تابع إمكان بمعلمات $(\sigma_2, \underline{\beta})$ ومشاهدات $(\underline{Y}_2^*, Z_2)$، وبالتالي فإن تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ تعتمد على نوع العلاقة بين المعلمتين $(\sigma_1)$ و $(\sigma_2)$، ففي حالة وجود علاقة تربط بين $(\sigma_1)$ و $(\sigma_2)$، ولتكن $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma)$، يتم الحصول على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة عن طريق ضرب العلاقة (31) مع تابع الإمكان الخاص بمشاهدات العينة المدروسة لنحصل على الآتي:

$$f\left(\underline{\beta},\sigma \mid \underline{Y}_1^*,\underline{Y}_2^*\right) \propto \frac{1}{\sigma^{(n1+n2+1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[v_1\hat{\sigma}_1^2 + v_2\sigma_2^2 + \left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_1\right)' Z_1' Z_1\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_1\right) + \left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_2\right)' Z_2' Z_2\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_2\right)\right]\right\} \qquad (32)$$

إذ إن $(v_2 = n_2 - p)$،وبإجراء عملية التكامل على العلاقة (32) بالنسبة لحدود المعلمة $(\sigma)$ نحصل على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$وهي:

$$f\left(\underline{\beta} \mid \underline{Y}_1^*,\underline{Y}_2^*\right) \propto \left[1+\left(\underline{\beta}-\underline{E}\right)' \frac{B^*}{M}\left(\underline{\beta}-\underline{E}\right)\right]^{-\left(\frac{n1+n2}{2}\right)} \qquad (33)$$

إذ إن:

$$\underline{E} = \left(Z_1' Z_1 + Z_2' Z_2\right)^{-1}\left(Z_1' \underline{Y}_1^* + Z_2' \underline{Y}_2^*\right)$$

$$B^* = Z_1' Z_1 + Z_2' Z_2$$

$$M = \left(v_1\hat{\sigma}_1^2 + v_2\hat{\sigma}_2^2 + \underline{\hat{\beta}}_1' Z_1' Z_1 \underline{\hat{\beta}}_1 + \underline{\hat{\beta}}_2' Z_2' Z_2 \underline{\hat{\beta}}_2\right) - \underline{E}' B^* \underline{E}$$

العلاقة (33) عبارة عن توزيع t- متعدد المتغيرات بدرجة حرية $(n_1+n_2-p)$ وبالتالي فإن الوسط الحسابي للتوزيع أعلاه هو $(\underline{E})$ الذي يمثل تقدير بيز لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ في حالة اعتماد تابع خسارة تربيعية والذي بإضافته إلى التقديرات الأولية للمعلمات $(\underline{\theta})$ نحصل على تقدير بيز لمتجه المعلمات $(\underline{\theta})$ بالنسبة للنموذج غير الخطي المتعدد الموضح في العلاقة (5)، والتقديرات النهائية نحصل عليها بإجراء عملية التكرار.

للحصول على مقدر بييز للمعلمة $(\sigma)$ نقوم بإجراء عملية التكامل للصيغة (32) بالنسبة لحدود متجه المعلمات $(\underline{\beta})$ لنحصل على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة الحدية للمعلمة $(\sigma)$ وهو:

$$f\left(\sigma \mid \underline{Y}_1^*, \underline{Y}_2^*\right)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{F}{2}\right)\sigma^{(F+1)}}\left(\frac{U F}{2}\right)^{\frac{F}{2}} \exp\left(\frac{-U F}{2\sigma^2}\right),\quad 0<\sigma<\infty \qquad (34)$$

حيث إن: $UF$ هي معلمة توزيع معكوس غاما لـ $\sigma$.

والعلاقة (34) تمثل توزيع معكوس غاما للمعلمة $(\sigma)$ بوسط حسابي:

$$E_{f(\sigma|\underline{Y}^*)}(\sigma)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-p}{2}\right)}\left(\frac{U F}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (35)$$

والعلاقة الأخيرة تمثل تقدير بييز للمعلمة $(\sigma)$ باعتماد تابع خسارة تربيعية.

من جهة أخرى وفي حالة عدم وجود علاقة تربط بين $(\sigma_1)$ و $(\sigma_2)$ وغالباً وفي الجانب العملي خاصةً لا نواجه مثل هذه الحالة، ولنفترض أن $(\sigma_1)$ معلومة وأن $(\underline{\beta})$ و $(\log\ \sigma_2)$ لهما تابع الكثافة الاحتمالية السابقة غير المعلوماتية الموضحة في العلاقة الآتية:

$$f(\beta,\sigma_2)\propto \frac{1}{\sigma_2}, -\infty<\underline{\beta}<\infty, \qquad 0<\sigma_2<\infty \qquad (36)$$

من هنا فإن تابع الإمكان للعينة المدروسة سيأخذ الشكل الآتي:

$$L\left(\underline{\beta},\sigma_2 \mid \sigma_1, \underline{Y}_1^*, \underline{Y}_2^*\right)\propto \frac{1}{\sigma_2^{n2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(\underline{Y}_1^*-Z_1\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}_1^*-Z_1\underline{\beta}\right)- -\frac{1}{2\sigma_2^2}\left(\underline{Y}_2^*-Z_2\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}_2^*-Z_2\underline{\beta}\right)\right] \qquad (37)$$

وبضرب تابع الكثافة الاحتمالية السابقة الموضحة في العلاقة (36) بتابع الإمكان الموضح في العلاقة (37) وبإجراء عملية التكامل بالنسبة إلى حدود $(\sigma_2)$ نحصل

على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة الحدية $(\underline{\beta})$ [8]:

$$f(\beta/\sigma_1,\underline{y}_1^*,\underline{y}_2^*)\propto\left\{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}_1)'Z_1'Z_1(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}_1)\right]\right\}+$$

$$+\left[1+\frac{(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}_2)'Z_2'Z_2(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}_2)}{v_2\hat{\sigma}_2^2}\right]^{\frac{-n2}{2}} \qquad (38)$$

وكما ظهر لنا فإن العلاقة (38) مكونة من حدين، الحد الأول هو توزيع طبيعي لـ $(\underline{\beta})$ والحد الثاني هو توزيع t- متعدد المتغيرات، من هنا فإن تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة الحدية لـ $(\underline{\beta})$ ككل تعرف بتوزيع (Multivariate Normal t-)، وباستخدام طريقة التوسيع للحد الثاني وتحويله إلى سلسلة تقاربية نحصل على توزيع طبيعي في الحد الثاني، ليكون تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة الحدية لـ$(\underline{\beta})$ كما يلي:

$$f(\underline{\beta}\,|\,\sigma_1,\underline{Y}_1^*,\underline{Y}_2^*)\propto\exp\begin{bmatrix}-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}_1)'Z_1'Z_1(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}_1)\\-\frac{1}{2\sigma_2^2}(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}_2)'Z_2'Z_2(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}_2)\end{bmatrix} \qquad (39)$$

$$\propto-\frac{1}{2}(\underline{\beta}-\tilde{\underline{\beta}})'A(\underline{\beta}-\tilde{\underline{\beta}})$$

والعلاقة (39) عبارة عن توزيع طبيعي متعدد المتغيرات إذ إن:

$$\tilde{\underline{\beta}}=\left(\frac{1}{\sigma_1^2}Z_1'Z_1+\frac{1}{\hat{\sigma}_2^2}Z_2'Z_2\right)\left(\frac{1}{\sigma_1^2}Z_1'\underline{Y}_1^*+\frac{1}{\hat{\sigma}_2^2}Z_2'\underline{Y}_2^*\right) \qquad (40)$$

$$A=\left(\frac{1}{\sigma_1^2}Z_1'Z_1+\frac{1}{\hat{\sigma}_2^2}Z_2'Z_2\right) \qquad (41)$$

والعلاقة (40) عبارة عن تقدير بيز لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ بالاعتماد على تابع خسارة تربيعية إذ إن $(\tilde{\beta})$ يمثل الوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات المبين في العلاقة (39) والذي بإضافته إلى التقدير الأولي لمتجه المعلمات $(\underline{\theta})$ نحصل على تقدير بيز للمعلمات $(\underline{\theta})$ للنموذج غير الخطي الموضح في العلاقة

(5)، وللحصول على التقديرات النهائية لــ $(\underline{\theta})$ نجري عملية التكرار ذاتها الموضحة في الفقرة أولاً .

الحالة الأخيرة التي بينها الباحث (A. Zellner) تفترض أن كلاً من $(\sigma_1)$ و $(\sigma_2)$ غير معلومة وهذه الحالة كثيراً ما نواجهها في التطبيق العملي، وتظهر عندما تكون لدينا مجموعتين من البيانات اختيرت تحت ظروف مختلفة التي لا يمكن أن يكــون هنالك أساس لافتراض علاقة بين $(\sigma_1)$ و $(\sigma_2)$ مسبقاً.

تابع الإمكان هنا سيأخذ العلاقة الآتية [8]:

$$L(\underline{\beta},\sigma_1,\sigma_2 \mid \underline{Y}_1^*,\underline{Y}_2^*) \propto \frac{1}{\sigma_1^{n_1}\sigma_2^{n_2}} \exp\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(\underline{Y}_1^* - Z_1\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}_1^* - Z_1\underline{\beta}\right) \\ -\frac{1}{2\sigma_2^2}\left(\underline{Y}_2^* - Z_2\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}_2^* - Z_2\underline{\beta}\right)\end{array}\right] \quad (42)$$

وتابع الكثافة الاحتمالية السابقة غير معلوماتية لــ $(\underline{\beta})$ و $(\log \sigma_1)$ و $(\log \sigma_2)$ هو:

$$f(\underline{\beta},\sigma_1,\sigma_2) \propto \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} \quad , \quad -\infty < \underline{\beta} < \infty \,, \quad \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0 \qquad (43)$$

وبضرب العلاقة (42) بالعلاقة (43) نحصـــل على تابع الكثافة الاحتماليــة اللاحقة المشتركة للمعلمات $(\sigma_2, \sigma_1, \underline{\beta})$ وهو:

$$f(\underline{\beta},\sigma_1,\sigma_2 \mid \underline{Y}_1^*,\underline{Y}_2^*) \propto \frac{1}{\sigma_1^{n_1+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left[v_1\hat{\sigma}_1^2 + \left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_1\right)' Z_1' Z_1\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_1\right)\right]\right\}$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma_2^{n_2+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\left[v_2\hat{\sigma}_2^2 + \left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_2\right)' Z_2' Z_2\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_2\right)\right]\right\} \qquad (44)$$

وبإجراء عملية التكامل للصيغة (44) بالنسبة لحدود $(\sigma_1)$ و $(\sigma_2)$ نحصل على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة الحدية لــ $(\underline{\beta})$ وهو:

$$f\left(\underline{\beta}\,|\,\underline{Y_1^*},\underline{Y_2^*}\right)\propto\left[1+\frac{\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}_1}\right)^T Z_1^T Z_1\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}_1}\right)}{\upsilon_1\hat{\sigma}_1^2}\right]^{-\frac{n1}{2}}.$$

$$.\left[1+\frac{\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}_2}\right)^T Z_2^T Z_2\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}_2}\right)}{\upsilon_2\hat{\sigma}_2^2}\right]^{-\frac{n2}{2}} \qquad (45)$$

والعلاقة (45) عبارة عن حاصل ضرب حدين كل حد يمثل توزيع t– متعدد المتغيرات، من هنا فإن التوزيع ككل يسمى –(Multivariate– Double t).ولتحليل العلاقة (45) قام كل من (G. C. Tiao ) و( A. Zellner) [3]بعملية توسيع تقاربي لكل حد من الحدين ليحصلا على تابع الكثافة الاحتمالية اللاحقة الآتية:

$$f\left(\underline{\beta}\,|\,\underline{Y}^*\right)\dot{\propto}\exp\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2\hat{\sigma}_1^2}\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_1\right)Z_1{}'Z_1\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_1\right)\\-\frac{1}{2\hat{\sigma}_2^2}\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_2\right)Z_2{}'Z_2\left(\underline{\beta}-\underline{\hat{\beta}}_2\right)\end{array}\right]$$

$$\dot{\propto}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}}\right)'D\left(\underline{\beta}-\overline{\underline{\beta}}\right)\right] \qquad (46)$$

إذ إن $\dot{\propto}$تشير إلى تناسب تقاربي، وأن:

$$\overline{\underline{\beta}}=\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_1^2}Z_1{}'Z_1+\frac{1}{\hat{\sigma}_2^2}Z_2{}'Z_2\right)^{-1}\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_1^2}Z_1{}'\underline{Y}_1^*+\frac{1}{\hat{\sigma}_2^2}Z_2{}'\underline{Y}_2^*\right) \qquad (47)$$

$$D=\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_1^2}Z_1{}'Z_1+\frac{1}{\hat{\sigma}_2^2}Z_2{}'Z_2\right) \qquad (48)$$

والعلاقة (46) عبارة عن توزيع طبيعي متعدد المتغيرات وأن $(\overline{\underline{\beta}})$ هو متجه الوسط الحسابي للتوزيع، فهو تقدير بيز لـ $(\underline{\beta})$ باعتماد تابع خسارة تربيعية الذي بإضافته إلى التقديرات الأولية نحصل على تقدير بيز للمعلمات $(\underline{\theta})$ للنموذج

اللاخطي الموضح في العلاقة (5) ، وبإجراء عملية التكرار نحصل إلى التقديرات النهائية لـــ $(\underline{\theta})$.

**الاستنتاجات: Conclusions**

من خلال ما تم عرضه في هذه الدراسة، تم التوصل إلى أهم استنتاجات الدراسة والتي يمكن تفصيلها كالآتي:

١. إن استخدام طريقة بييز في التقدير عند توفر معلومات سابقة بوصفها تابع توزيع احتمالي سابقة مرافقة طبيعية يعطي تقديرات للمعلمات أكثر واقعية من الطرق التقليدية.

٢. تم الحصول على الصيغ (23) و (35) لتقدير الانحراف المعياري للنموذج باستخدام طريقة بييز وحسب تابع الكثافة الاحتمالية السابقة المستخدمة.

**التوصيات: Recommendations**

إن أهم التوصيات التي يمكن بالاعتماد عليها تطوير هذه الدراسة وتوسيعها ما يأتي:

١- استخدام طريقة المحاكاة لدراسة خصائص المعلمات المقدرة ومن خلال دراسة توزيعات مختلفة.

٢- استخدام تابع كثافة احتمالية سابقة بالاعتماد على العينات المتعاقبة وتحت افتراض أن معلمة الارتباط الذاتي غير معلومة ومن وجهة نظر مدرسة بييز ومقارنتها مع الطرق المستخدمة في هذه الدراسة.

٣- تعميم ما تناولناه فيما يخص استخدام تابع كثافة احتمالية سابقة بالاعتماد على تجربة واحدة لتشمل أكثر من تجربة واحدة.

**المصادر: References**

**المراجع الأجنبية**

[1] HALPERN E. F., 1973- "**Polynomial Regression from a Bayesian Approach**", Journal of the American Statistical Association, vol. 68, No. 341, pp. 137 – 143.

[2] JUDJE G. G.; GRIFFITHS W. E.; HILL, R. C. and LEE T. C., 1985- "**Theory and Practice of Econometrics**", John Wiley, New York,1056 P.

[3] KEMPTHORN O., et al, 1954-"**Statistical and Mathematical in Biology**", Iowa state College Press, A M E S, IOWA,632 P.

[4] LARSON H. J., 1982- "**Introduction to Probability Theory and Statistical Inference**", Third Edition, John Wiley & Sons, New York.

[5] MOOD A. M; GRAYBILL F. A. and BOES D. S.,1985- "**Introduction to the Theory of Statistics**", Third Edition, MC Graw – Hill Inc.

[6] O'HAGAN 2004-,"**Kendall's Advanced, An Theory of Statistics**", Volume 2B, Bayesian Inference, 480 P.

[7] SOHN J. K. and KANG S. G., 1996-,"**Bayesian Estimation Procedure in Multiprocessor Non – Linear Dynamic Generalized Model**", Communications in Statistics: Theory and Method, vol. 25, pp. 2281 – 2296.

[8] ZELLNER A. 1971-,"**An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics**", John Wiley and Sons, Inc.

# Using Bayesian Method to Estimate the Parameters of Non Linear Regression Models

Dr.Abdo Al-Abdullah
Department of Basic Science
Faculty of Mechanic Engineering
Aleppo University

## Abstract

We have studied in this research how to use the Bayesian method to estimate the parameters of non-linear regression models based on the consequences of the previous probability density associated with natural consequences of the previous probability density based on successive samples .

The use of Bayesian method in the estimate when providing information as a precedent followed a probabilistic distribution of a former escort natural estimates for the parameters gives more realistic than traditional methods .

And was obtained tow formula:

$$E_{f(\sigma|Y^{*})}(\sigma)=\frac{\Gamma\left(\frac{F-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{F}{2}\right)}\left(\frac{UF}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{f(\sigma|\underline{Y}^{*})}(\sigma)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-p}{2}\right)}\left(\frac{UF}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

To estimate the standard deviation of the model using the Bayesian method and followed by the previous probability density used.

Key words: non-linear regression - standard deviation – Bayes