حول التكرار الهندسي للقيم الذاتية لمسألة ديرخليه على البيان الهندسي ذي الحلقات

د. منير الترك
قسم العلوم الأساسية
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
جامعة دمشق

الملخص

ندرس على البيان الهندسي Γ، مسألة القيم الحدية الطيفية:

$$\left.\begin{array}{l}(p(x)u')' - q(x)u = \lambda r(x)u\ , \qquad (x \in \Gamma) \\ u\big|_{\partial\Gamma} = 0\end{array}\right\} \qquad (*)$$

حيث p و q و r دوال ذات قيم حقيقية و p و r دوال موجبة و λ وسيط طيفي.

نفرض أن الدالة u تحقق في العقد الداخلية للبيان Γ الشرط:

$$\sum_{\gamma_i} \alpha_i(x) u_i'(x) = k(x) u(x)$$

حيث $\alpha_i(x)$ و $k(x)$ أعداد موجبة، والمجموع محسوب على كل الأضلاع γ_i التي لها الطرف x و $u_i'(x)$ مشتق الدالة u عند x على الضلع γ_i، بالاتجاه من x.

ندرس بالتوافق مع المسألة (*) المسألة $(*_j)$، الناتجة عن المسألة (*) باستبدال Γ بـ Γ_j الذي يعبّر عن أحد التراكيب المترابطة من المجموعة $\Gamma\setminus\{c\}$ حيث c عقدة داخلية للبيان Γ و $j = 1,2,\dots,l$.

نفرض $\chi(\lambda)$ تكرار هندسي للقيمة الذاتية λ للمسألة (*) و $\chi_j(\lambda)$ تكرار هندسي للقيمة الذاتية نفسها λ للمسألة $(*_j)$. عندئذ يكون الفرق $\left[\chi(\lambda) - \sum_{j=1}^{l}\chi_j(\lambda)\right]$ مساوياً للواحد عندما ينعدم حل المسألة عند العقدة الداخلية c، ومساوياً للصفر عندما لا ينعدم حل المسألة عند العقدة الداخلية c.

الكلمات المفتاح: مسألة ديريخليه، طيف مسألة القيم الحدية، البيان الهندسي.

حول التكرار الهندسي للقيم الذاتية لمسألة ديرخليه على البيان الهندسي ذي الحلقات

1- مقدمة: إن نظرية المعادلات التفاضلية على البيان الهندسي (الشبكة الفضائية) تطورت كثيراً في العشرين سنة الأخيرة (Покрный et all.,2004). وتعد النجاحات الأهم تلك التي حصلت في نظرية المعادلات التفاضلية الخطية (عادية أو جزئية). غير ان بعض العقبات اعاقت سرعة هذا التطور، ولم تدرس هذه العقبات كفاية. سنتطرق في هذا البحث لإحدى العقبات المتعلقة بنظرية طيف المسألة الحدية لمعادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية على البيان الهندسي.

نتابع في عملنا مابدأناه في ، حيث نعمم بعض نتائج (Аль-, 1995 و (Завгородный et all.,1992) إلى الحالة التي يكون فيها Γ بيان يحوي، حلقات. حيث تم في هذين العملين إيجاد العلاقة بين التكرار الهندسي للقيمة الذاتية λ لمسألة القيم الحدية الطيفية على البيان الهندسي Γ في حالة Γ شجرة، مع التكرار الهندسي للقيمة الذاتية λ على البيان الجزئي Γ_j، حيث Γ_j مجموعة مترابطة من المجموعة $\Gamma\setminus\{c\}$ و c عقدة داخلية ما للبيان Γ. كما دُرست القيم الذاتية الحقيقية فقط في (Завгородный et all.,1992) و(Аль-Турк, 1995)، بينما نناقش هنا الحالة العامة– القيم الذاتية العقدية.

2- صياغة المسألة:

لتكن لدينا المجالات المفتوحة:

$$\gamma_i=\left\{(1-t)a_i+tb_i \quad ; \quad a,b\in R^n, 0<t<1\right\} \quad ; \ i=1,2,\dots,m$$

حيث إن $\gamma_i \cap \overline{\gamma}_j = \phi$ و $\overline{\gamma}_j$ غلاقة المجال γ_j في R^n و $i \neq j$. ولتكن J مجموعة أطراف المجالات المشتركة لمجالين على الأقل من المجالات γ_i.

تعريف: نسمي المجموعة $\Gamma = \left(\bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i\right) \cup J(\Gamma)$ بيان هندسي مفتوح (شبكة فضائية)- اختصارا بيان.

سنفرض دائما أن Γ مجموعة مترابطة.

تعريف: نسمي نقاط J عقداً داخلية للبيان Γ ونسمي بقية أطراف المجالات التي لا تنتمي الى J عقداً حدية لهذا البيان. ونرمز لمجموعة العقد الحدية للبيان Γ بالرمز $\partial\Gamma$. وسنفرض دائماً أن $\partial\Gamma \neq \phi$.

تعريف: نسمي المجالات γ_i أضلاع البيان Γ وسنرمز لاجتماعها بالرمز $R(\Gamma)$. اذا كانت a عقدة داخلية للبيان Γ فإننا نرمز بـ $I(a)$ للمجموعة $I(a) = \{ i = 1,2,...,m \ ; \ a \in \overline{\gamma_i} \}$ مجموعة ادلة الاضلاع γ_i التي لها الطرف a.

سندرس التظيم الاقليدي في الفضاء R^n والتبولوجيا المولدة منه.

تعريف: إن المجموعة الجزئية من البيان Γ التي تشاكل الدائرة نسميها حلقة في Γ. وسنفرض أن البيان Γ يحوي حلقات، في الحالة العامة.

سندرس دوال ذات قيم عقدية معرفة على Γ أو على $R(\Gamma)$. ليكن $x \in \gamma_i$ والدالة u معرفة في جوار لهذه النقطة (الجوار بالمعنى التوبولوجي على Γ). عندئذ، فإن $u'(x)$ يعني مشتق الدالة u عند x بالاتجاه $h_i = b_i - a_i$، أي

$$u'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x + \varepsilon h_i)}{\varepsilon}$$

اذا كان المشتق $u'(x)$ موجود، فاننا نقول إن الدالة u فضولة عند x. نلاحظ انه اذا كانت الدالة p فضولة عند $x \in R(\Gamma)$، فان قيمة العبارة $(pu')'(x)$ غير متعلقة باي طرف من اطراف الضلع γ_i سنرمز له بالرمز a_i وايها سنرمز له بالرمز b_i.

إن المفاهيم المعروضة هنا هي نفسها المعروضة في (Покрный et all.,2004) و(Покрный and Пенкин, 1989).

ان الموضوع الاساسي المدروس في هذا البحث هو دراسة مسألة القيم الحدية

$$-(pu')'(x) + q(x)u = \lambda r(x)u \quad ; \quad x \in R(\Gamma) \qquad (1)$$

$$u|_{\partial\Gamma} = 0 \qquad (2)$$

حيث إن الدالة ذات القيم العقدية المطلوبة u معرفة ومستمرة على البيان Γ (بما فيها العقد الداخلية J) وتحقق المساواة

$$\sum_{i \in I(a)} \alpha_i(a) u_i'(a) = k(a) u(a) \quad ; \quad a \in J(\Gamma) \qquad (3)$$

حيث $\alpha_i(a)$ و $k(a)$ اعداد موجبة معطاة.

نفهم العلاقة (2) على أنها نهاية.

سنفرض ان المعاملات r و q و p في المعادلة (1) هي دوال ذات قيم حقيقية تحقق الشروط:

أ- الدوال r و q و p' دوال مستمرة بانتظام على كل اضلاع البيان Γ.

ب- $\inf\{p(x) : x \in R(\Gamma)\} > 0$

ت- $\inf\{r(x) : x \in R(\Gamma)\} > 0$

ث- λ وسيط طيفي عقدي.

3- المبرهنات:

لتكن c عقدة داخلية للبيان Γ و l عدد تراكيب المجموعة المترابطة $\Gamma\setminus\{c\}$ (ربما يكون $l=1$ عندما تكون c تنتمي الى حلقةٍ ما من البيان Γ. سنرمز لهذه التراكيب بالرموز $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_l$.

ليكن $\chi(\lambda)$ التكرار الهندسي للقيمة الذاتية λ للمسألة (1) و(2). وليكن $\chi_j(\lambda)$ التكرار الهندسي للقيمة الذاتية λ للمسألة:

$$\left.\begin{aligned} -(pu')'(x) + q(x)u = \lambda r(x)u \quad &; \; x \in \Gamma_j \\ u\big|_{\Gamma_j} = 0 \quad & \end{aligned}\right\} \qquad (3_j)$$

حيث Γ_j احد التراكيب المترابطة من المجموعة $\Gamma\setminus\{c\}$ و c عقدة داخلية ما للبيان Γ.

اذا لم تكن λ قيمة ذاتية للمسألة (1) و(2) (أو للمسألة (3_j))، فاننا نفرض $\chi(\lambda)=0$ (وبالمقابل $\chi_j(\lambda)=0$).

نعرّف، أخيراً من أجل كل دليل j ($j=1,2,\dots,l$) المجموعة:

$$I_j = \{ i \in I(c) \,;\, \gamma_i \subseteq \Gamma_j \}$$

توطئة 1: ليكن E فضاء جميع حلول المسألة (1) و(2). وليكن θ دالي خطي ما معرّف على E. ولتكن $\phi^1,\phi^2,\ldots,\phi^s$ حلولاً مستقلة خطياً للمسألة (1) و(2) بحيث يكون $\theta(\phi^1)\neq 0$. عندئذٍ توجد حلولاً $\psi^1,\psi^2,\ldots,\psi^s$ للمسألة (1) و(2) مستقلة خطياً تحقق العلاقات:

$$\theta(\psi^1)=1 \quad , \quad \theta(\psi^j)=0 \quad ; \quad j=2,3,\ldots,s \qquad (4)$$

البرهان: يمكن التحقق بسهولة من ان الدوال

$$\psi^1=(\theta(\phi^1))^{-1}\phi^1 \qquad (5)$$

$$\psi^j=\theta(\phi^j)\phi^1-\theta(\phi^1)\phi^j \quad ; j=2,3,\ldots,s \qquad (6)$$

تحقق العلاقات (4). وعليه، فإنها كتركيب خطي للدوال $\phi^1,\phi^2,\ldots,\phi^s$ تعدّ حلولاً للمسألة (1) و(2).

ان الاستقلال الخطي للدوال $\psi^1,\psi^2,\ldots,\psi^s$ ينتج من ان مصفوفة المؤثر على E المعرّف بالعلاقات (5) و (6):

$$\begin{bmatrix} (\theta(\phi^1))^{-1} & 0 & 0\ \ldots & 0 \\ \theta(\phi^2) & -\theta(\phi^1) & 0\ \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta(\phi^s) & \ldots & \ldots & -\theta(\phi^1) \end{bmatrix}$$

لها محدد غير صفري. وهو المطلوب.

توطئة 2: لتكن $c\in J$. ولنفرض، من أجل عددٍ ما j_0، يوجد حل للمسألة (3_{j_0}) يحقق العلاقة:

$$\sum_{i \in I_{j_0}} \alpha_i(c) u_i'(c) \neq 0 \qquad (7)$$

وليكن E_0 فضاء الدوال من E التي تنعدم عند c. عندئذٍ

$$\dim E_0 = \sum_{j=1}^{l} \chi_j - 1 \qquad (8)$$

البرهان: دون المساس بعمومية المسألة، يمكن ان نفرض $j_0 = 1$. من شرط التوطئة نجد $\chi_1 \geq 1$.

ندرس الحالة

$$\chi_1 = 1 \ , \ \chi_j = 0 \quad ; \quad j = 2,3,\dots,l \qquad (9)$$

ليكن $y \in E_0$. ينتج من المساواة $y(c) = 0$ انه أياً يكن $j = 1,2,\dots,s$، فإن الدالة $y|_{\Gamma_j}$ (مقصور الدالة y على Γ_j) حل للمسألة (3_j). وعليه، فإنه ينتج من (3_j)، أولاً:

$$y|_{\Gamma_j} \equiv 0 \qquad ; \qquad j = 2,3,\dots,s \qquad (10)$$

وثانياً، يوجد العدد العقدي β بحيث يكون

$$y|_{\Gamma_1} \equiv \beta\phi \qquad (11)$$

حيث إن ϕ دالة ذاتية ما للمسألة (3_1).

ينتج من المساواة (10) ومن المساواة $y(c) = 0$ ان:

$$\sum_{i \in I_1} \alpha_i(c) y_i'(c) = k(c) y(c) - \sum_{i \in I(c) \setminus I_1} \alpha_i(c) y_i'(c) = 0$$

وهذا يعني، أولاً بالاستفادة من (11) أن $\beta = 0$ ، لأنه من شرط التوطئة 2 لدينا

$$\sum_{i \in I_1} \alpha_i(c)\phi_i'(c) \neq 0$$

بتجميع (10) و (11) نجد $y \equiv 0$. ولما كانت y دالة اختيارية من الفضاء E_0، فإننا نجد $\dim E_0 = 0$. وعليه، فإنه من (9) نحصل على (8).

ندرس، الان الحالة المعاكسة لـ (9). نرمز بالرمز J_1 لمجموعة الادلة $j = 1, 2, \dots, l$ التي يكون من اجلها، أولاً $\chi_j > 0$ ، وثانياً، يوجد حل للمسألة (3_j) يحقق العلاقة:

$$\sum_{i \in I_j} \alpha_i(c)u_i'(c) \neq 0$$

نرمز بالرمز J_2 لمجموعة الادلة $j = 1, 2, \dots, l$ التي يكون من اجلها $\chi_j > 0$، وكل حل للمسألة (3_j) يحقق العلاقة:

$$\sum_{i \in I_j} \alpha_i(c)u_i'(c) = 0$$

نرمز اخيراً بالرمز J_3 لمجموعة الادلة $j = 1, 2, \dots, l$ التي لا تدخل في J_1 و لا في J_2. ان المجموعة J_1 غير خالية (من شروط التوطئة). وبالنسبة الى J_2، فإن كونها خالية ممكن في الحالة $\chi_1 > 1$.

مهما تكن $j \in J_1 \bigcup J_2$ ، فإنه توجد في فضاء الحلول للمسألة (3_j) قاعدة $\left\{ \phi_1^j, \phi_2^j, \dots, \phi_{\chi_j}^j \right\}$. يمكن ان نفرض انه لكل دليل j من J_1 تتحقق العلاقات:

$$\theta_j(\phi_1^j) = 1 \quad , \quad \theta_j(\phi_t^j) = 0 \quad ; \quad t = 2, 3, \dots, \chi_j \qquad (12)$$

حيث إن الدالي θ_j معرّف بالعلاقة $\theta_j = \sum_{i \in I_j} \alpha_i(c)\phi_i'(c)$.

ندرس الدوال:

$$v_1^j = \begin{cases} \phi_1^1(x) & , \quad x \in \Gamma_1 \\ -\phi_1^j(x) & , \quad x \in \Gamma_j \\ 0 & , \quad x \in \Gamma \setminus \left(\Gamma_1 \cup \Gamma_j\right) \end{cases} \qquad ; \qquad j \in J_1 \setminus \{1\} \qquad (13)$$

$$v_t^j = \begin{cases} \phi_t^j(x) & , \quad x \in \Gamma_j \\ 0 & , \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_j \end{cases} \qquad ; \quad j \in J_1 \, , t = 2, 3, \ldots , \chi_j \qquad (14)$$

$$v_t^j = \begin{cases} \phi_t^j(x) & , \quad x \in \Gamma_j \\ 0 & , \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_j \end{cases} \qquad ; \quad j \in J_2 \, , t = 1, 2, \ldots , \chi_j \qquad (15)$$

يمكن التحقق بسهولة ان هذه الدوال هي حلول غير صفرية للمسألة (1) و(2) وأن عددها يساوي:

$$\left|J_1 \setminus \{1\}\right| + \sum_{j \in J_1}\left(\chi_j - 1\right) + \sum_{j \in J_2} \chi_j$$

أي يساوي $\sum_{j=1}^{l} \chi_j - 1$.

سنبين الاستقلال الخطي للدوال (13) و (14) و (15). ليكن

$$\sum_{j \in J_1 \setminus \{1\}} c_1^j v_1^j(x) + \sum_{j \in J_1} \sum_{t=2}^{\chi_j} c_t^j v_t^j(x) + \sum_{j \in J_2} \sum_{t=1}^{\chi_j} c_t^j v_t^j(x) = 0 \; ; \; x \in \Gamma \quad (16)$$

نأخذ مقصور هذه المساواة على البيان الجزئي Γ_j حيث $j \in J_2 \cup (J_1 \setminus \{1\})$، فنجد من العلاقات (13) و (14) و (15):

$$\sum_{t=1}^{\chi_j} c_t^j \phi_t^j(x) = 0 \quad ; \quad x \in \Gamma_j \quad , \quad j \in J_2$$

$$-c_1^j \phi_1^j(x) + \sum_{t=2}^{\chi_j} c_t^j \phi_t^j(x) = 0 \quad ; \quad x \in \Gamma_j \quad , \quad j \in J_1 \setminus \{1\}$$

ومنه ومن تعريف الدوال ϕ_t^j ينتج

$$c_t^j = 0 \quad , \quad j \in J_2 \cup (J_1 \setminus \{1\}) \quad ; \quad t = 1,2,\ldots,\chi_j \qquad (17)$$

ومن (16) و (17) تنتج المطابقة

$$\sum_{t=2}^{\chi_1} c_t^1 \phi_t^1(x) = 0 \quad ; \quad x \in \Gamma_1$$

و لما كانت الدوال ϕ_t^1 مستقلة خطياً، فإن $c_t^1 = 0$ حيث $t = 2,3,\ldots,\chi_1$. وهذا يعني، بالاضافة الى (17)، الاستقلال الخطي للدوال (13) و (14) و (15).

يتبقى علينا اثبات انه اذا كان $y \in E_0$، فان الدالة y تكتب كتركيب خطي للدوال (13) و (14) و (15). وعليه، اذا كان $y \in E_0$، فإن $y(c) = 0$، وهذا يعني أن $y(c) = 0$ أياً يكن $j = 1,2,\ldots,l$، فإن $y|_{\Gamma_j} = 0$ حلول للمسألة (3_j). وعندها يكون أولاً، $y|_{\Gamma_j} = 0$ وذلك ايا يكن $j \in J_3$. وثانياً أياً يكن $j \in J_2 \cup (J_1 \setminus \{1\})$ فإن الدالة $y|_{\Gamma_j}$ تكتب كتركيب خطي للدوال $\{\phi_1^j, \phi_2^j, \ldots, \phi_{\chi_j}^j\}$. أي أنه أيا يكن $j \in J_2 \cup (J_1 \setminus \{1\})$ فإنه توجد مجموعة الاعداد $\{\mu_t^j \in C\}_{t=1}^{\chi_j}$ بحيث يكون

$$y\big|_{\Gamma_j} = \sum_{i=1}^{\chi_j} \mu_i^j \varphi_i^j(x) \qquad (18)$$

ندرس، على البيان Γ، الدالة

$$z = y - \sum_{j\in J_2} \sum_{i=1}^{\chi_j} \mu_i^j v_i^j(x) - \sum_{j\in J_1\setminus\{1\}} \left[-\mu_1^j v_1^j + \sum_{i=2}^{\chi_j} \mu_i^j v_i^j \right] \qquad (19)$$

اذا كان $z \equiv 0$ على Γ ، فإن المطلوب قد تحقق. لذا نفرض أن z لا تطابق الصفر على Γ.

نجد من تعريف z انها حل للمسألة (1) و (2). و تتحقق (من (18) ومن (13) و (14) و (15)) المساواة

$$z\big|_{\Gamma_j} \equiv 0 \qquad ; \; j = 2,3,\dots,l \qquad (20)$$

وهذا يعني ان $z(c) = 0 = z_i'(c)$ أياً يكن $i \in I(c)\setminus I_1$. وعليه فان

$$\theta_1(z) = K(c) - \sum_{j=2}^{l} \theta_j(z) = 0 \qquad (21)$$

ينتج من (20) ان $z\big|_{\Gamma_1} \neq 0$، لذا (مع مراعاة $z(c) = 0$) فإن $z\big|_{\Gamma_1}$ دالة ذاتية للمسألة (3_1) . اضف الى ذلك فانها، مع $c\varphi_1^1$، مستقلتين خطياً (من (21)). وهذا يعني، أولاً، أن $\chi_1 > 1$ ، وثانياً

$$z\big|_{\Gamma_1} = \sum_{i=1}^{\chi_1} \mu_i^1 \phi_i^1 \qquad (22)$$

من أجل أعدادٍ عقديةٍ ما $\{\mu_1^1, \mu_2^1, \dots, \mu_{\chi_1}^1\}$.

ينتج من (21) و (22) و (12) أن

$$0 = \theta_1(z) = \sum_{i=1}^{Z_1} \mu_i^1 \theta_1(\phi_i^1) = \mu_1^1$$

أي ان $\mu_1^1 = 0$، وهذا يعني أن المساواة (22) يمكن ان تكتب بدقة اكبر كما يلي:

$$z\big|_{\Gamma_1} = \sum_{i=2}^{Z_1} \mu_i^1 \phi_i^1$$

و تكافئ هذه المساواة (من (14) ومع مراعاة ان $1 \in J_1$ ومن (20)) المساواة $z = \sum_{i=2}^{Z_1} \mu_i^1 v_i^1$ والتي تُثبت، بالاضافة الى (19)، أن y هي تركيب خطي للدوال (13) و (14) و (15).

وعليه، فإنه تم برهان صحة (8) في حالة عدم تحقق (9). وهو المطلوب.

مبرهنة 1: ليكن، من أجل عددٍ ما j_0، يوجد حل للمسألة $(3)_{j_0}$ يحقق العلاقة (7) ويفرض أن أي حل للمسألة (1) و (2) ينعدم عند c. عندئذٍ تتحقق المساواة:

$$\chi = \sum_{j=1}^{l} \chi_j - 1 \qquad (23)$$

البرهان: من شروط هذه المبرهنة نجد ان $E = E_0$، ومن التوطئة 2 نجد صحة المبرهنة 1.

مبرهنة 2: ليكن، من أجل عددٍ ما j_0، يوجد حل للمسألة $(3)_{j_0}$ يحقق العلاقة (7)، ولنفرض وجود حل للمسألة (1) و (2) لا ينعدم عند c. عندئذٍ تتحقق المساواة:

$$\chi = \sum_{j=1}^{l} \chi_j \qquad (24)$$

البرهان: ليكن u حل غير صفري عند c للمسألة (1) و (2). نطبق التوطئة 1 من أجل الدالي $\theta(u) = u(c)$ ، ايضا من وجود، في E، قاعدة $\{v_1, v_2, \dots, v_\chi\}$ ، حيث إن $v_1(c) = 1$ و $v_t(c) = 0$ (أياً تكن $t = 2,3,\dots,\chi$). ينتج من التوطئة 2 ان قياس الغلاف الخطي للدوال $\{v_2, \dots, v_\chi\}$ مساوٍ للعدد $\sum_{j=1}^{l} \chi_j - 1$ ، أي أن $\chi - 1 = \sum_{j=1}^{l} \chi_j - 1$ ، وهو المطلوب.

توطئة 3: ليكن y و v حلين غير تافهين للمعادلة (1) يحققان الشرط

$$u\Big|_{\partial\Gamma\setminus\{a\}} = 0$$

حيث a عقدة حدية ما للبيان Γ. وليكن $y'(a) \neq 0$ ، $y(a) = 0$ و الحل y لاينعدم في حلقات Γ. عندئذ يكون $v(a) = 0$.

نتيجة: اذا كان $|I_{j_0}| = 1$ ضمن شروط المبرهنة 1(أي ان Γ_{j_0} يرتبط بالعقدة c بضلع واحد فقط) وليس للدالة φ أصفار في حلقات Γ_{j_0}، فإن أي حل للمسألة (1) و(2) مقابل للقيمة الذاتية $\lambda = \lambda_0$ ينعدم عند c ويحقق (23).

البرهان: ليكن y حل للمسألة (1) و(2) مقابل للقيمة الذاتية $\lambda = \lambda_0$. وليكن الحل $y\big|_{\Gamma_{j_0}}$ ينعدم عند النقاط $\partial\Gamma_j \setminus \{c\}$ ، فإنه وفقا للتوطئة 3 من أجل الدالتين φ و $y\big|_{\Gamma_{j_0}}$ نجد ان $y(c) = 0$. وعليه فإنه وفقا للمبرهنة 1 ومن كون $y(c) = 0$ نجد تحقق صحة (23). وهو المطلوب.

المراجع

1- Аль-Турк М., 1995- **Осцилляционные свойства негладких уравнений на сетях**. Диссертация, Воронеж,136 р.

2- Завгородный М.Г., Аль- Обейд А., Прядиев В.Л., 1992- **Геометрическая кратность собственных значений задачи Дирихле на графе.** *Деп. в ВИНИТИ*, № 2821-*В*92, 8 С.

3- Покрный Ю.В., Пенкин О.М., 1989- **О Теоремах сравнения для уравнений на графах**. Диффеpенциалные уравнения, (25) 7, 1141-1150.

4- Покрный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шапров С.А., 2004- **Дифференциалные уравнения на геометрических графах**. Физматлит, Россия, 272 р.

O Geometric multiplicity of the eigenvalues for the Dirichlet problem on a graph with cycles

ABSTRACT

Consider, on the geometric graph Γ, the spectral boundary value problem:

$$\left.\begin{array}{c}(p(x)u')' - q(x)u = \lambda r(x)u \quad , \qquad (x \in \Gamma) \\ u|_{\partial\Gamma} = 0\end{array}\right\} \quad (*)$$

Where p , q and r are the positive functions, q is the real valued function and λ is a spectral parameter.

Suppose that function u satisfies a boundary condition in every internal node a of Γ

$$\sum_{\gamma_i} \alpha_i(x)u_i'(x) = k(x)u(x)$$

Where $\alpha_i(x)$ and $k(x)$ are fixed and positive numbers. The summation is performed over the edges γ_i adjoin to the vertex x and $u_i'(x)$ denotes the "boundary" derivative of u at the end x of the edges γ_i in the direction "from x".

We study with the problem $(*)$ the problem $(*_j)$ replacing Γ by Γ_j where Γ_j is the component of the connected set $\Gamma\setminus\{c\}$ where c is an internal node of Γ ; $j = 1, 2, \ldots, l$.

Suppose that $\chi(\lambda)$ is a geometric multiple for λ as an eigenvalue for the problem (*) and $\chi_j(\lambda)$ is a geometric multiple for λ as an eigenvalue for the problem $(*_j)$. Then the difference $\left[\chi(\lambda)-\sum_{j=1}^{l}\chi_j(\lambda)\right]$ equals one when the solution of the problem is zero at c, or equals zero when the solution of the problem is zero at c.

Key words: *Dirichlet problem, spectral boundary value problem, Geometric Graph.*