دراسة تدريج الحلقة شبه الوراثية ودراسة الحلقة نصف الوراثية (شبه الوراثية) في الحلقات المدرجة

*** د. حسين قريوي ** د. صباح حمندوش**

*عضو هيئة تدريسية، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة الفرات

** دكتورة، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حلب

الملخص

درسنا في هذا العمل تدريج الحلقة شبه الوراثية ودرسنا الحلقة نصف الوراثية (شبه الوراثية) في الحلقات المدرجة ، وحصلنا على النتائج الآتية:

1- إذا كانت $R = \underset{s\in S}{\oplus} R_s$ حلقة AIP تبديلية مدرجة وفق شريط متعامد S بحيث يكون $R_0 = \{0\}$، وكان α عنصراً من $S-\{0\}$، فإن: a) إذا كانت الحلقة الجزئية R_α ضربية، فإنها تكون شبه وراثية.b) إذا كانت الحلقة الجزئية R_α موضعية، فإنها تكون نصف وراثية.

2-إذا كانت $R = \underset{s\in S}{\oplus} R_s$ $NJ-$ حلقة شبه وراثية يمينية مدرجة وفق مونوئيد اختزالي S عنصره الحيادي e ، ولنفرض أن $sd \neq e$ من أجل كل عنصرين s و d من S يحققان $(s,d) \neq (e,e)$. إذا كانت الحلقة الجزئية R_e موضعية فإنها تكون نصف وراثية يمينية.

الكلمات المفتاحية: مونوئيد اختزالي، شريط متعامد، حلقة AIP ، $NJ-$حلقة، حلقة موضعية، حلقة ضربية، مودول ضربي، مودول إسقاطي، حلقة وراثية، حلقة شبه وراثية، تدريج الحلقة.

مقدمة:

عرفت الحلقات الوراثية (نصف الوراثية) لأول مرة من قبل Henri Cartan و Samul Elenberg في [1]. قام C.Nastaseccu و V.Oystaeyen بتدريج الحلقات الوراثية في [14] حيث درجا الحلقة الوراثية اليسارية تدريجاً قوياً. دُرس تدريج الحلقات الوراثية وفق نصف زمرة في [22]، ودُرس تدريج الحلقات نصف الوراثية اليمينية وفق نصف زمرة في [23]. دُرست الحلقات الوراثية ونصف الوراثية في أنواع معينة من الحلقات المدرجة في [25,24]، ودُرست الحلقات الوراثية والوراثية الضعيفة ونصف الوراثية ونصف الوراثية الضعيفة المدرجة وفق شريط متعامد ووفق نصف زمرة صفرية يسارية في [26]، كذلك دُرست الحلقات الوراثية ونصف الوراثية في حلقة بيزوت المدرجة وفي بعض الحلقات المدرجة التي كل مودول فوقها يكون مسطحاً في [27]، كما دُرست الحلقات الوراثية ونصف الوراثية في حلقة ريكارت التبديلية المدرجة وفي بعض الحلقات التبديلية المدرجة التي كل مودول يميني وكل مودول يساري فوقها يكون قابلاً للقسمة في [28]. سندرس في هذا العمل تدريج الحلقة شبه الوراثية وسندرس الحلقة نصف الوراثية (شبه الوراثية) في الحلقات المدرجة.

1- معلومات أساسية:

إن كلمة حلقة، فيما سيأتي، نعني بها حلقة غير مبتذلة ذات عنصر وحدة 1، وعبارة نصف زمرة (زمرة)، فيما سيأتي، نعني بها نصف زمرة ضربية (زمرة ضربية) تحوي عنصرين على الأقل، إذا لم ننوه صراحة إلى خلاف ذلك.

1-1. تعريف [8]: نصف الزمرة (Semigroup) هي مجموعة غير خالية وعملية جبرية ثنائية تجميعية معرفة عليها؛ و يُقال عن نصف زمرة S إنها مونوئيد إذا وجد في S عنصر حيادي.

1-2. تعريف [7]: يُقال عن نصف زمرة S إنها نصف زمرة اختزالية (Cancellative Semigroup) من اليسار (من اليمين) إذا كان:

$$ab = ac \Rightarrow b = c \quad (ba = ca \Rightarrow b = c) \quad \forall\, a,b,c \in S$$

1-3. تعريف [18,16]: يُقال عن عنصر e من نصف زمرة S إنه جامد فيها إذا كان $e^2 = e$؛ ويُقال عن نصف زمرة S (مع الصفر) إنها شريط متعامد (Perpendicular Band) إذا كانت جميع عناصرها جوامد متعامدة فيها أي إذا كانت جميع عناصرها جوامد وتحقق الشرط:

$$ab = 0 \;\forall a,b \in S;\; a \neq b$$

1-4. تعريف [12]: لتكن R حلقة. إذا عرفنا على R العملية o بالشكل:

$$a o b = a + b - ab \;\forall a,b \in R$$

عندئذ يكون (R,o) مونوئيداً عنصره الحيادي هو صفر الحلقة R. تسمى العملية o دائرة جاكبسون أو تسمى العملية المرافقة، وتسمى نصف الزمرة (R,o) نصف الزمرة المرافقة لـ R.

1–5. تعريف [3]: يقال عن عنصر a من حلقة R إنه شبه نظامي من اليمين (Right Quasi-regular) (شبه نظامي من اليسار (Left Quasi-regular) في R إذا وجد لـ a معكوس من اليمين (معكوس من اليسار) في (R,o)، أي إذا وجد في R عنصر b بحيث يكون:

$$a\,o\,b=0 \qquad (b\,o\,a=0)$$

ويقال عن عنصر a من الحلقة R إنه شبه نظامي فيها إذا كان a شبه نظامي من اليمين وشبه نظامي من اليسار بآنٍ معاً في R.

1–6. تعريف [8,6]: يُعرف جذر جاكبسون (The Jacobson radical) لحلقة R، ويُرمز له بـ $J(R)$، بأنه أكبر مثالية شبه نظامية في R.

- إذا كانت الحلقة R ذات عنصر وحدة، فإن جذر جاكبسون للحلقة R يُعرف أيضاً بأنه تقاطع كل المثاليات اليسارية الأعظمية في R.

1–7. تعريف [15,6]: لتكن B مجموعة جزئية غير خالية من حلقة R. نُسمى المجموعة $\{r\in R;\ rB=\{0\}\}$ العادمة اليسارية (Left Annihilator) للمجموعة B في الحلقة R، و يُرمز لها بالرمز $l.ann_R(B)$. إن $l.ann_R(B)$ مثالية يسارية في الحلقة R، وتُسمى المجموعة $\{r\in R;\ Br=\{0\}\}$ العادمة اليمينية (Right Annihilator) للمجموعة B في الحلقة R، ويُرمز لها بالرمز $r.ann_R(B)$. إن $r.ann_R(B)$ مثالية يمينية في الحلقة R.

1–8. تعريف [9]: يُقال عن مثالية يمينية (يسارية) I في حلقة R إنها مثالية بحته (Pure Ideal) إذا كان من أجل كل عنصر a من I يوجد عنصر b من I بحيث يكون $a=ab$ $(a=ba)$.

1–9. تعريف [11]: يُقال عن مثالية A في حلقة تبديلية R إنها مثالية ضربية (Multiplication Ideal) إذا كان من أجل كل مثالية B من R ومحتواة في A، يُوجد مثالية C في R بحيث يكون $B=AC$.

1–10. تعريف[3]: يُقال عن حلقة R إنها NJ- حلقة (NJ- ring) إذا كان كل عنصر من R إما نظامياً أو شبه نظامي فيها.

يجدر بنا أن نشير إلى أنه: الحلقة R تكون NJ- حلقة إذا، وفقط إذا، كان كل عنصر منها و لا ينتمي إلى $J(R)$ هو عنصر نظامي فيها.

1–11. تعريف [19]: يُقال عن حلقة R إنها AIP يمينية إذا كانت العادمة اليمينية لأي مثالية يمينية من R مثالية بحته. تُعرَّف الحلقة AIP اليسارية بشكل مشابه.

1–12. تعريف:[6] يقال عن حلقة R إنها حلقة موضعية إذا كانت الحلقة R تملك مثالية يسارية (يمينية) أعظمية وحيدة .

1–13. تعريف [4]: يُقال عن حلقة تبديلية R إنها حلقة ضربية (Multiplication Ring) إذا كانت كل مثالية في R ضربية.

1–14. تعريف [11]: يُقال عن مودول يميني (يساري) واحدي M فوق حلقة تبديلية R إنه مودول يميني (يساري) ضربي (Multiplication Module) إذا كان كل مودول جزئي N من M من الشكل IM من أجل كل مثالية I من R.

15-1 تعريف [21]: لتكن R حلقة، وليكن M $R-$ مودولاً يمينياً، و N $R-$ مودولاً يسارياً، وليكن C $Z-$ مودولاً. يُدعى التطبيق $f: M \times N \to C$ $R-$ تطبيقاً متوازناً (Balanced Map) إذا حقق f الشروط الآتية:

$$1)\ f((m_1+m_2,n)) = f((m_1,n)) + f((m_2,n))$$
$$2)\ f((m,n_1+n_2)) = f((m,n_1)) + f((m,n_2))$$
$$3)\ f((mr,n)) = f((m,rn))$$

وذلك من أجل كل m_1 و m_2 و m من M وكل n_1 و n_2 و n من N وكل r من R.

16-1 تعريف [21]: لتكن R حلقة، وليكن M $R-$ مودولاً يمينياً، و N $R-$ مودولاً يسارياً. الجداء التنسوري (Tensor Product) لِـ M و N فوق R هو زمرة جمعية تبديلية، يُرمز لها بـ $M \otimes_R N$، و $R-$ تطبيق متوازن $\tau : M \times N \to M \otimes_R N$

يحققان الخاصة الآتية: إذا كانت G زمرة جمعية تبديلية، وكان $f : M \times N \to G$ $R-$ تطبيقاً متوازناً، فإنه يوجد هومومورفيزم وحيد $\theta : M \otimes_R N \to G$ بحيث يكون المخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists\theta"] \\ & G \end{tikzcd}$$

تبادلياً، أي بحيث يكون $\theta \circ \tau = f$.

17–1. تعريف [15,6]: لتكن R حلقة، وليكن M $R-$ مودولاً يمينياً. يُقال إن M هو $R-$ مودول يميني مسطح (Flat Right Module) إذا تحقق الشرط الآتي:

إذا كانت $0 \to M_1' \to M_1 \to M_1'' \to 0$ متتالية تامة قصيرة من $R-$ مودولات يسارية و $R-$ هومومورفيزمات مودولات يسارية، فإن المتتالية:

$$0 \to M \otimes_R M_1' \to M \otimes_R M_1 \to M \otimes_R M_1'' \to 0$$

تكون أيضاً تامة قصيرة (عندما ننظر إليها على أنها متتالية من الزمر الجمعية التبديلية). يُعرَّف الـ $R-$ مودول يساري مسطح بشكل مشابه.

يجدر بنا أن نشير إلى أنه: يُقال عن مثالية يمينية I في حلقة R إنها مسطحة في R إذا كانت مسطحة عندما ننظر إليها على أنها $R-$ مودول يميني؛ ويُقال عن مثالية يسارية I في حلقة R إنها مسطحة في R إذا كانت مسطحة عندما ننظر إليها على أنها $R-$ مودول يساري؛ ويُقال عن مثالية I في حلقة R إنها مسطحة في R إذا كانت مسطحة عندما ننظر إليها على أنها $R-$ مودول يميني ومسطحة عندما ننظر إليها على أنها $R-$ مودول يساري.

18-1. مبرهنة [11]: لتكن R حلقة تبديلية، وليكن M $R-$ مودولاً يسارياً (يمينياً) واحدياً ضربياً بحيث $l.ann_R(M)$ $(r.ann_R(M))$ مثالية بحته في R. عندئذ يكون M $R-$ مودولاً يسارياً مسطحاً ($R-$ مودولاً يمينياً مسطحاً).

19-1.تعريف [10,6,5]: لتكن R حلقة. يُقال عن $R-$ مودول يميني P إنه $R-$مودول يميني إسقاطي (Projective) إذا كان من أجل كل $R-$ ايبيومورفيزم مودولات يمينية $g : B \to C$ وكل $R-$هومومورفيزم مودولات يمينية $h : P \to C$ يوجد $R-$هومومررفيزم مودولات يمينية $h' : P \to B$ بحيث يكون $h = g \circ h'$، أي بحيث يكون المخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h'"'] \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

تبادلياً. يُعرف الـ $R-$ مودول اليساري الإسقاطي بشكل مشابه.

- يجدر بنا أن نشير إلى أنه إذا كانت P مثالية يمينية (مثالية يسارية) في حلقة R، فإنه يُقال إن P مثالية يمينية إسقاطية (مثالية يسارية إسقاطية) في R إذا كانت P إسقاطية عندما ننظر إليها على أنها $R-$مودول يميني (إذا كانت P إسقاطية عندما ننظر إليها على أنها $R-$مودول يساري)، وإذا كانت P مثالية في حلقة R ، فإنه يُقال إن P مثالية إسقاطية في R إذا كانت إسقاطية عندما ننظر إليها على أنها $R-$مودول يميني وإسقاطية عندما ننظر إليها على أنها $R-$مودول يساري.

ويجدر بنا أن نشير أيضاً إلى أنه : إذا كان M مودولاً يمينياً (يسارياً) منتهي التوليد فوق حلقة R. إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون المودول M مودولاً يمينياً (يسارياً) إسقاطياً فوق R هو أن يكون بالإمكان إيجاد عناصر m_i $(i = 1,2,...,n)$ من M وإيجاد $R-$ هومومورفيزمات مودولات يمينية (يسارية) $f_i : M \to R$ $(i = 1,2,...,n)$ بحيث إن كل عنصر m من M يكتب بالشكل:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \ f_i(m) \qquad \left(m = \sum_{i=1}^{n} f_i(m)\, m_i\right)$$

20-1 مبرهنة [21,10] : إذا كانت R حلقة موضعية، فإن كل $R-$ مودول يميني (يساري) مسطح ومنتهي التوليد هو $R-$ مودول يميني (يساري) إسقاطي.

21-1. تعريف [10]: يُقال عن حلقة R إنها حلقة نصف وراثية (Semihereditary Ring) يمينية (يسارية) إذا كانت كل مثالية يمينية (يسارية) في R ومنتهية التوليد إسقاطية فيها؛ ويُقال عن الحلقة R إنها نصف وراثية إذا كانت نصف وراثية يمينية ونصف وراثية يسارية معاً.

يجدر بنا أن نشير إلى أنه: إذا كانت R حلقة تبديلية، فإن R تكون نصف وراثية إذا، وفقط إذا، كانت كل مثالية في R ومنتهية التوليد إسقاطية في R [انظر المرجع (10)].

1−22. تعريف [2]: يُقال عن حلقة R إنها حلقة شبه وراثية (Quasi-Hereditary Ring) يمينية (يسارية) إذا كانت كل مثالية يمينية (يسارية) في الحلقة R مسطحة فيها؛ ويُقال عن الحلقة R إنها شبه وراثية إذا كانت شبه وراثية يمينية وشبه وراثية يسارية معاً.

1−23.مبرهنة:[17] لتكن R حلقة ذات عنصر وحدة. إن الشروط الآتية متكافئة:

1− R تملك مثالية يسارية أعظمية وحيدة.

2− R تملك مثالية يمينية أعظمية وحيدة.

3− $R/J(R)$ حلقة تقسيم.

4− $R-U(R)$ مثالية في R حيث إن $U(R)$ هي مجموعة عناصر الحلقة R القابلة للقلب في R.

يجدر بنا أن نشير إلى أنه: إذا تحقق أي شرط من الشروط الخمسة، عندئذ يكون $J(R)=R-U(R)$.

1−24. تمهيدية[6]: لتكن R حلقة، وليكن y عنصراً من R. إن الشرطين الآتيين متكافئان:

آ− $y\in J(R)$.

ب− $1-xy$ قابل للقلب من اليسار في R من أجل كل x من R.

ت− $1-xyz$ قابل للقلب في R من أجل كل x و z من R.

1−25.تعريف [13]: لتكن R حلقة، ولتكن S نصف زمرة. يُقال إن R حلقة مدرجة (Graded Ring) وفق S، أو يُقال إن R حلقة $S-$ مدرجة، أو يُقال إن (R,S) تدريج للحلقة R وفق S إذا وجدت أسرة زمر جزئية جمعية $\{R_s\}_{s\in S}$ من R تحقق الشرطين الآتيين:

أ− $R=\underset{s\in S}{\oplus} R_s$.

ب − $R_sR_t\subseteq R_{st}$ من أجل أي عنصرين s و t من S.

1−26.مبرهنة[20]: لتكن R حلقة، و S نصف زمرة اختزالية .إذا استطعنا تدريج الحلقة R وفق S، أي إذا كان $R=\underset{s\in S}{\oplus} R_s$ تدريجاً للحلقة R وفق S، فإن S تملك عنصراً حيادياً e، ويكون عندها $1\in R_e$.

2− دراسة تدريج الحلقة شبه الوراثية ودراسة الحلقة نصف الوراثية (شبه الوراثية) في الحلقات المدرجة:

2−1.مبرهنة: لتكن $R=\underset{s\in S}{\oplus} R_s$ حلقة AIP تبديلية مدرجة وفق شريط متعامد S بحيث يكون $R_0=\{0\}$، وليكن α عنصراً من $S-\{0\}$. عندئذ:

1− إذا كانت الحلقة الجزئية R_α ضربية، فإنها تكون شبه وراثية.

2− إذا كانت الحلقة الجزئية R_α موضعية، فإنها تكون نصف وراثية.

البرهان:

1− لتكن P مثالية في الحلقة الجزئية R_α. إن P مثالية في R، وذلك لأنه:

I) $(P,+)$ تكون زمرة جزئية من الزمرة $(R,+)$.

II) إذا كان x عنصراً من P وكان b عنصراً من $R=\underset{s\in S}{\oplus} R_s$ ، فإنه بالإمكان كتابة b بالشكل:

$$b=\sum_{s\in S} b_s \;;\; b_s\in R_s$$

وبالتالي فإن:

$$xb=x(\sum_{s\in S} b_s)=xb_\alpha+\sum_{s\in S-\{\alpha\}} xb_s$$

وبما أن S شريط متعامد و $R_0=\{0\}$ ، فإن:

$$R_{s_1}\,R_{s_2}\subseteq R_0=\{0\}\quad \forall s_1,s_2\in S\;,\; s_1\neq s_2$$

و بالتالي فإن:

$$xb_\alpha\in R_\alpha \;\&\; xb_s\in R_\alpha R_s=\{0\}\forall s\in S-\{\alpha\}$$

ومن ثم فإن $xb=xb_\alpha\in P$.

بما أن R حلقة AIP تبديلية، فإن $r.ann_R(P)$ مثالية بحته في R [التعريف (1-11)]. لنبرهن على أن $r.ann_R(P)$ مثالية بحته في R_α :

إن $r.ann_{R_\alpha}(P)\subseteq r.ann_R(P)$ ، وبالتالي فإن:

$$\forall\; x\in r.ann_{R_\alpha}(P)\Rightarrow x\in r.ann_R(P)$$

بما أن $r.ann_R(P)$ مثالية بحته في R ، فإنه يوجد y من R بحيث يكون $x=x\,y$. بما أن $y\in R$ ، فإنه بالإمكان كتابته بالشكل:

$$y=\sum_{s\in S} y_s \;;\quad y_s\in R_s$$

وبالتالي فإن:

$$x=x(\sum_{s\in S} y_s)=\sum_{s\in S} x\,y_s=xy_\alpha$$

بما أن $y_\alpha\in r.ann_{R_\alpha}(P)$ و $y_\alpha\in R_\alpha$ بحيث يكون $x=xy_\alpha$ ، فإن $r.ann_{R_\alpha}(P)$ مثالية بحته في R_α . بما أن الحلقة الجزئية R_α ضربية، فإن المثالية P تكون ضربية [التعريف (1-13)]، وبما أن $r.ann_{R_\alpha}(P)$ مثالية بحته في R_α ، فإن P تكون $R_\alpha-$ مودولاً يمينياً مسطحاً [التعريف (1-18)] ، وبأسلوب مماثل يمكن البرهان على أن P هي $R_\alpha-$ مودول يساري مسطح، وبالتالي فإن R_α تكون شبه وراثية [التعريف (1-22)].

2- لتكن I مثالية منتهية التوليد في الحلقة الجزئية R_α. يمكن وبأسلوب مماثل للبرهان على P هي $R_\alpha-$ مودول يميني مسطح و $R_\alpha-$ مودول يساري مسطح البرهان على أن المثالية I المنتهية التوليد تكون $R_\alpha-$ مودولاً يمينياً مسطحاً و $R_\alpha-$ مودولاً يسارياً مسطحاً، وبما أن الحلقة الجزئية

R_α موضعية، فإن I تكون R_α – مودولاً يمينياً إسقاطياً و R_α – مودولاً يسارياً إسقاطياً [التعريف (20−1)]، وبالتالي فإن الحلقة الجزئية R_α تكون نصف وراثية [التعريف (21−1)].

2−2.مبرهنة: لتكن $R=\underset{s\in S}{\oplus}R_s$ $NJ-$ حلقة شبه وراثية يمينية مدرجة وفق مونوئيد اختزالي S عنصره الحيادي e ، ولنفرض أن $sd\neq e$ من أجل كل عنصرين s و d من S يحققان $(s,d)\neq(e,e)$. إذا كانت الحلقة الجزئية R_e موضعية فإنها تكون نصف وراثية يمينية.

البرهان:

بما أن $R=\underset{s\in S}{\oplus}R_s$ حلقة مدرجة وفق مونوئيد اختزالي S عنصره الحيادي e، فإن $1\in R_e$ [مبرهنة (26−1)]. بما أن الحلقة الجزئية R_e غير صفرية وذات عنصر وحدة 1، وبما أن R_e موضعية، فإن:

$$J(R_e)=R_e-U(R_e)\ \text{[مبرهنة (23−1)]}$$

إذا كان $x\in R-U(R)$ ، فإن $x\in R=\underset{s\in S}{\oplus}R_s$ ، وبالتالي فإنه بالإمكان كتابة x بالشكل:

$$x=x_e+\sum_{s\in S-\{e\}}x_s\ ;\ x_s\in R_s\ \ \forall s\in S$$

بما أن الحلقة R $NJ-$ حلقة مدرجة وفق مونوئيد اختزالي S عنصره الحيادي e، و $ad\neq e$ من أجل كل a و d من S يحققان $(a,d)\neq(e,e)$، فإن كل عنصر من $R_s-\{0\}$ هو عنصر غير نظامي في R وذلك من أجل كل s من $S-\{e\}$ لأنه إذا كان العنصر x نظامياً في R ، فإنه يوجد في R عنصر b بحيث يكون $x=xbx$ ، وبما أن $b\in R=\underset{s\in S}{\oplus}R_s$ فإنه بالإمكان كتابة b بالشكل:

$$b=\sum_{\alpha\in S}b_\alpha\quad ;\ b_\alpha\in R_\alpha$$

وبالتالي فإن:

$$x=xbx\ \&\ b=\sum_{\alpha\in S}b_\alpha\Rightarrow x=x(\sum_{\alpha\in S}b_\alpha)x=xb_ex+\sum_{\alpha\in S-\{e\}}xb_\alpha x$$ إن

$xb_ex\notin R_s-\{0\}$ ، وذلك لأنه: إذا كان $xb_ex\in R_s-\{0\}$ ، فإن:

$$\left.\begin{array}{c} xb_ex\in R_s\ \&\ xb_ex\in R_s\,R_e\,R_s\subseteq R_{ses}=R_{s^2}\\ \&\\ xb_ex\neq 0\ \&\ R=\underset{s\in S}{\oplus}R_s\end{array}\right\}\Rightarrow s=s^2\Rightarrow se=ss\Rightarrow e=s$$

وهذا يتناقض مع كون $s\neq e$. كذلك إن:

$$xb_\alpha x\notin R_s-\{0\}\ \forall\alpha\in S-\{e\}$$

وذلك لأنه إذا وجد في $S-\{e\}$ عنصر t بحيث يكون $xb_tx\in R_s-\{0\}$ ، فإن:

$$xb_tx\in R_s\ \&\ xb_tx\in R_sR_tR_s\subseteq R_{sts}\ \&\ xb_tx\neq 0\ \&\ R=\underset{s\in S}{\oplus}R_s$$

$$\Rightarrow s=sts\Rightarrow se=sts\Rightarrow e=ts$$

وهذا مناقض لافتراضنا أن $ad\neq e$ من أجل كل a و d من S يحققان $(a,d)\neq(e,e)$. بما أن:

$$xb_ex,\ xb_\alpha x\notin R_s-\{0\}\ \forall\alpha\in S-\{e\}$$

$$\&$$
$$x \in R_s \ \& \ x = xb_e x + \sum_{\alpha \in S-\{e\}} xb_\alpha x$$

فإن $x = 0$ ، وهذا مناقض لكون $x \neq 0$. وبالتالي فإن هذا مع ملاحظة أن $0 \in J(R)$ يبين لنا أن:

$$x_s \in J(R) \quad \forall s \in S - \{e\}$$ [الإشارة في التعريف (1−10)]

إن $x_e \in J(R_e)$ ، وذلك لأنه: إذا كان $x_e \notin J(R_e)$ ، لكان $x_e \notin R_e - U(R_e)$ ، وبالتالي لكان $x_e \in U(R_e)$ ، ومن ثم فإن:

$$\left.\begin{array}{c} x = x_e + \sum_{s \in S-\{e\}} x_s \\ \& \\ x_e \in U(R_e) \end{array}\right\} \Rightarrow x_e^{-1}x = 1 + \sum_{s \in S-\{e\}} x_e^{-1}x_s = 1 - j_1 \ ; \ j_1 = -\sum_{s \in S-\{e\}} x_e^{-1}x_s \in J(R)$$

وبالتالي فإن:

$j_1 \in J(R) \Rightarrow$ $1 - j_1$ قابل للقلب في R [تمهيدية (1−24)]

$\Rightarrow$ $x_e^{-1}x$ قابل للقلب في R $\Rightarrow$ x قابل للقلب من اليسار في R

وبما أن:

$$\left.\begin{array}{c} x = x_e + \sum_{s \in S-\{e\}} x_s \\ \& \\ x_e \in U(R_e) \end{array}\right\} \Rightarrow xx_e^{-1} = 1 + \sum_{s \in S-\{e\}} x_s x_e^{-1} = 1 - j_2 \ ; \ j_2 = -\sum_{s \in S-\{e\}} x_s x_e^{-1} \in J(R)$$

فإن:

$j_2 \in J(R) \Rightarrow$ $1 - j_2$ قابل للقلب في R [تمهيدية (1−24)]

$\Rightarrow$ xx_e^{-1} قابل للقلب في R $\Rightarrow$ x قابل للقلب من اليمين في R

إذاً x قابل للقلب في R ، وهذا مناقض لكون $x \in R - U(R)$.

ليكن z عنصراً من R . عندئذ بالإمكان كتابة z بالشكل:

$$z = z_e + \sum_{s \in S-\{e\}} z_s \quad ; z_s \in R_s \ \ \forall s \in S$$

بما أن $x_e \in J(R_e)$ ، فإن $1 - z_e x_e$ قابل للقلب في R_e [تمهيدية (1−24)]، ومن ثم فإن:

$$(1 - z_e x_e)^{-1}(1 - zx_e) = (1 - z_e x_e)^{-1}(1 - z_e x_e - \sum_{s \in S-\{e\}} z_s x_e)$$

$$= 1 - \sum_{s \in S-\{e\}} (1 - z_e x_e)^{-1} z_s x_e = 1 - \xi \ ; \xi = \sum_{s \in S-\{e\}} (1 - z_e x_e)^{-1} z_s x_e$$

بما أن $z_s \in J(R) \ \forall s \in S - \{e\}$ ، فإن $\xi \in J(R)$ ، ومن ثم فإن:

$\xi \in J(R) \Rightarrow$ $1 - \xi$ قابل للقلب في R [تمهيدية (1−24)] $\Rightarrow$

$(1 - zx_e)^{-1}(1 - zx_e)$ قابل للقلب في R $\Rightarrow$ $1 - zx_e$ قابل للقلب من اليسار في R

بما أن $1-zx_e$ قابل للقلب من اليسار في R من أجل كل z من R ، فإن $x_e \in J(R)$ [تمهيدية ((1−24)]، وبالتالي فإن:

$$x = x_e + \sum_{s\in S-\{e\}} x_s \in J(R)$$

ومن ثم فإن $J(R) \subseteq R-U(R)$ ، وبما أن $R-U(R) \subseteq J(R)$ ، فإن $J(R) = R-U(R)$ ، وبالتالي فإن $R-U(R)$ مثالية في R ، ومن ثم فإن الحلقة R موضعية [تمهيدية (1−23)]. لتكن P مثالية يمينية منتهية التوليد في الحلقة الجزئية R_e. إذا كانت $P=\{0\}$ ، فإن P تكون يمينية إسقاطية في R_e. أما إذا كانت $P \neq \{0\}$ ، فإن PR تكون مثالية يمينية ومنتهية التوليد غير صفرية في R وتكون $P \subseteq PR$. بما أن الحلقة R شبه وراثية يمينية، فإن المثالية اليمينية PR هي $R-$ مودول يميني مسطح، وبما أن R حلقة موضعية، فإن PR تكون $R-$ مودولاً يمينياً إسقاطياً [المبرهنة (1−20)] ، وبالتالي فإنه توجد أسرة عناصر $\{m_i \ ; i=1,2,...,n\}$ من PR ، وأسرة R- هومومورفيزمات مودولات يمينية $\{f_i : PR \to R \ ; i=1,2,...,n\}$ ، بحيث إن كل عنصر m من PR يكتب بالشكل $m=\sum_{i=1}^{n} m_i f_i(m)$ [إشارة التعريف 1−19].

إذا كان x عنصراً من P ، فإن:

$$x \in P \Rightarrow f_i(x) \in R = \bigoplus_{s \in S} R_s \quad \forall\, i=1,2,...,n$$

$$\Rightarrow f_i(x) = \sum_{s\in S} (f_i(x))_s \quad \forall\, i=1,2,...,n \ ; (f_i(x))_s \in R_s$$

لنعرف، من أجل كل i من $\{1,2,...,n\}$ ، التطبيق $g_i : P \to R_e$ بالشكل:

$$g_i(x) = [f_i(x)]_e \qquad \forall\, x \in P$$

عندئذٍ ، إذا كان y و x عنصرين من P ، وكان λ عنصراً من R_e ، فإن:

$$\begin{aligned} g_i(x+y) &= [f_i(x+y)]_e = [f_i(x)+f_i(y)]_e = [f_i(x)]_e + [f_i(y)]_e \\ &= g_i(x) + g_i(y) \end{aligned}$$

$$g_i(x\lambda) = [f_i(x\lambda)]_e = [f_i(x)\lambda]_e = [f_i(x)]_e \lambda = g_i(x)\lambda$$

يبين، لنا هذا، أن $g_i \ (i \in I)$ هو R_e-هومومورفيزم مودولات يمينية من P إلى R_e. ليكن t عنصراً من $\{1,2,...,n\}$. عندئذٍ:

$$m_t \in \{m_i \ ; i=1,2,...,n\} \subseteq PR \Rightarrow$$

$$m_t = \sum_{i=1}^{n_t} a_{i,t}\, r_{i,t} \quad ; \quad r_{i,t} \in R \quad , a_{i,t} \in P \subseteq R$$

وبالتالي فإن:

$$r_{i,t} \in R \,;\, i=1,2,\ldots,n_t \Rightarrow r_{i,t} = \sum_{s \in S} (r_{i,t})_s \,;\, (r_{i,t})_s \in R_s \,,\, i=1,2,\ldots,n_t$$

وبما أن

$m_t \in PR \subseteq R$ ، فإنه بالإمكان كتابة m_t بالشكل:

$$m_t = \sum_{s\in S}(m_t)_s \quad ;(m_t)_s \in R_s$$

ومن ثم فإن:

$$m_t = \sum_{i=1}^{n_t} a_{i,t}\; r_{i,t} \Rightarrow \sum_{s \in S} (m_t)_s = a_{1,t}(\sum_{s \in S}(r_{1,t})_s) + \cdots + a_{n_t,t}(\sum_{s \in S}(r_{n_t,t})_s)$$

$$= a_{1,t}(r_{1,t})_e + a_{1,t}(\sum_{s \in S\text{-}\{e\}}(r_{1,t})_s) + \cdots + a_{n_t,t}(r_{n_t,t})_e + a_{n_t,t}(\sum_{s \in S\text{-}\{e\}}(r_{n_t,t})_s)$$

$$= a_{1,t}(r_{1,t})_e + \cdots + a_{n_t,t}(r_{n_t,t})_e + a_{1,t}(\sum_{s \in S\text{-}\{e\}}(r_{1,t})_s) + \cdots + a_{n_t,t}(\sum_{s \in S\text{-}\{e\}}(r_{n_t,t})_s)$$

$$\Rightarrow (m_t)_e = a_{1,t}(r_{1,t})_e + \cdots + a_{n_t,t}(r_{n_t,t})_e \in P$$

فإذا كان m' عنصراً من P ، فإن:

$$m' \in R_e \;\&\; m' \in PR$$

وبالتالي فإن:

$$m' \in PR \Rightarrow m' = \sum_{i=1}^{n} m_i\, f_i(m')$$

ومن ثم فإن:

$$f_i(m') \in R \quad \forall\; i=1,2,\ldots,n \quad \& \quad m_i \in PR \subseteq R \quad \forall\; i=1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow f_i(m') = \sum_{d\in S}(f_i(m'))_d \;\; \forall\, i=1,2,\ldots,n \;\;\&\; m_i = \sum_{s\in S}(m_i)_s \;\; \forall\, i=1,2,\ldots,n$$ حيث إن:

$$(f_i(m'))_d \in R_d \quad \& \quad (m_i)_s \in R_s$$

وبالتالي فإن:

$$m' = \sum_{i\in I} m_i\, f_i(m') \;\&\; f_i(m') = \sum_{d\in S}(f_i(m'))_d \;\; \forall\, i=1,2,\ldots,n$$

$$\& \; m_i = \sum_{s\in S}(m_i)_s \;\; \forall\, i=1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow m' = \sum_{i=1}^{n}(m_i)_s)(\sum_{d\in S}(f_i(m'))_d\,]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(m_i)_e (f_i(m'))_e + \sum_{\substack{(s,d)\in S\times S \\ (s,d)\neq(e,e)}} ((m_i)_s (f_i(m'))_d)]$$

وبما أن $sd \neq e$ من أجل كل عنصرين s و d من S يحققان $(s,d) \neq (e,e)$، فإن هذا، مع ملاحظة أن $m' \in R_e$ ، يبين لنا أن $m' = \sum_{i=1}^{n} [(m_i)_e (f_i(m'))_e]$ ، ومن ثم فإن $m' = \sum_{i=1}^{n} [(m_i)_e g_i(m')]$. بما أن $\{(m_i)_e \ ; i = 1,2,...,n\}$ أسرة عناصر من P ، و $\{g_i : P \to R_e \ ; i = 1,2,...,n\}$ أسرة R_e - هومومورفيزمات مودولات يمينية بحيث أن كل عنصر m' من P يكتب بالشكل $m' = \sum_{i=1}^{n} (m_i)_e g_i(m')$ ، فإن P هو $R_e -$ مودول يميني إسقاطي [إشارة التعريف [1−19]، وبالتالي فإن المثالية اليمينية P إسقاطية، ومن ثم فإن الحلقة الجزئية R_e تكون نصف وراثية يمينية.

يمكن بأسلوب مماثل، البرهان على أنه: إذا كانت $R = \underset{s\in S}{\oplus} R_s$ $NJ-$ حلقة شبه وراثية يسارية مدرجة وفق مونوئيد اختزالي S عنصره الحيادي e ، وكان $sd \neq e$ من أجل كل عنصرين s و d من S يحققان $(s,d) \neq (e,e)$ ، وكانت الحلقة الجزئية R_e موضعية فإنها تكون نصف وراثية يسارية.

المراجع:

[1] CARTAN .H and EILENBERK .S., 1956- ***Homological algebra***. Princeton University Press, Prince- ton, N.J.

[2] ZAMEERUDDIN Q., 1971 -***Quasi-Hereditary Rings***. Riv. Mat. Univ. Param(2).

[3] NICHOLSON W.K., 1973 -***Rings Whose Elements are Quasi-Regular or Regular***. Aequationes Maths.

[4] ANDERSON.D.,1976 –***Multiplication Ideals, Multiplication rings ,and the ring R[x]*** . Canadian Journal of Mathematics.

[5] LAMBEK J, 1976– ***A Blaisdell Book in Pure and Applied Mathematics.*** George Springer, Indian university.

[6] LAM T.Y.,1991-***A First Course in Noncommutative Rings.*** Graduate Texts in Mathematics, Vol. 131, Springer-Verlag, (Second Edition, 2001).

[7] CLASE M. V., 1993 – ***Semigroup Graded Rings***. Newfoundland.

[8] HOWIE J. M., 1995 -***Fundamentals of Semigroup Theory***. University of St Andrews, Clarendon Press, Oxford.

[9] AL THANI N. F., 1996–***Pure Baer Injective Module.*** Department of Mathematics, Faculty of Science, Qatar university.

[10] LAM T.Y., 1998– ***Lectures on Modules and Rings***. Springer, New York, Inc.

[11] MAJID M.A and DAVID J.S., 2001 –***Projective, Flat and Multiplication Modules***. New Zealand Journal of Mathematics.

[12] HEATHERLY H. E and TUCCI R. P., 2002 -***Adjoint Regular Rings***. International Journal of Mathematics and Mathematical Science, Vol. 30, Issue 8, 459-466.

[13] KELAREV A. V., 2002 – ***Ring Constructions and Applications***. Series in Algebra – Vol. 9, World Scientific Publishing Co.

[14] NASTASESCU C. and OYSTAEYEN V., 2004- ***Method of graded rings***. Springer-Verlag Berlin Heidlberg.

[15] PASSMAN D.S., 2004– ***A course in Ring theory***. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.

[16] **النادر** نادر، **سعد** سمير ، **خلاوي** علي، 2007– [illegible]. مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الأساسية، العدد 55.

[17] **النادر** نادر، **سعد** سمير ، **غزال** رانيا، 2008– [illegible]. مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الأساسية، العدد 60.

[18] ALNADER N and SAAD S and GHAZAL R.,2010– ***A Study of Graded Local Ring by Cancellative Semigroup and of the Identity Element of Graded Semilocal Ring by Semigroup***. Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) Volume43, Number 2, pp277-290.

[19] MAJIDINYA A and MOUSSAVI A and PAYKAN K., 2012 -***Rings in Which The Annihilator of an Ideal is Pure***. Department of Pure Mathematic, Faculty of Mathematical Sciences Tarbiat Modares University .

[20] **النادر** نادر، **سعد** سمير ، **حكيم** علياء، 2012– [illegible] *NJ*– [illegible]. مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الأساسية، العدد 88.

[21] TIMOTHY j. Ford, 2014–***Separable Algebras over Commutative Rings.*** Department of Mathematics, Florida Atlantic university, BOCA RA-TON,FL 33431 .

[22] **سعد** سمير، **حمندوش** صباح، 2015– [illegible] – مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الأساسية، العدد 103.

[23] **النادر** نادر، **العلوي** خالد، 2015– [illegible] – مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الأساسية، العدد 103.

[24] **النادر** نادر، **أحمد** محمد خير، **حمندوش** صباح، 2017– [illegible]– مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الأساسية، العدد 120.

[25] **النادر** نادر، **أحمد** محمد خير، **حمندوش** صباح، 2017– [illegible]– مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الأساسية، العدد 121.

[26] **النادر** نادر، **أحمد** محمد خير، **حمندوش** صباح، 2018– [illegible]– مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الأساسية، العدد 123.

[27] **النادر** نادر، **أحمد** محمد خير، **حمندوش** صباح، 2018– [illegible]– مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الأساسية، العدد 126.

[28] **النادر** نادر، **أحمد** محمد خير، **حمندوش** صباح، 2019– [illegible]– مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الأساسية، العدد 130.

Study Graded Quasi -Hereditary Ring and Study Semihereditary ring (Quasi -Hereditary) in Graded Rings

Hussien Qrewi*, Sabah Hamandosh**

*Doctor, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Univ. of Furat

**Doctor, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Univ. of Aleppo

Abstract

We studied in this work graded quasi- hereditary ring and study semihereditary ring (quasi- hereditary) in graded ring. we got the next results:

1) If $R = \underset{s \in S}{\oplus} R_s$ is a commutative AIP ring graded by a perpendicular band S such that $R_0 = \{0\}$, and α is an element of $S - \{0\}$. Then: a) If the subring R_α is multiplication, then R_α is quasi- hereditary. b) If R is a local ring ,then the subring R_α is a semihereditary. 2) If $R = \underset{s \in S}{\oplus} R_s$ is a right quasi-hereditary NJ- ring graded by cancellative monoid S with an identity element e, and $sd \neq e$ for every two elements s, d of S satisfy $(s,d) \neq (e,e)$. If the subring R_e is local ,then R_e is a right semihereditary.

Key words: Cancellative monoid, Perpendicular band, *AIP* Ring, *NJ*- Ring, local ring, Multiplication ring, Multiplication module, Projective module, Hereditary ring, Quasi- Hereditary ring, Graded ring.