تقدير وسطاء التوزيع نصف المنطقي باستخدام نماذج الحياة المعجلة بناء على بيانات مرتقبة من النوع الثاني

د. خضر الكريدي

أستاذ مساعد في قسم الإحصاء الرياضي. كلية العلوم. جامعة حلب

الملخص

عرضنا في هذا البحث نماذج التعجيل، واستخدمنا منها نموذج معكوس القوة في تقدير وسطاء التوزيع نصف المنطقي Half-Logistic بناء على بيانات مرتقبة من النوع الثاني مستخدمين مقدر المعقولية العظمى، وتم إيجاد قيمة المقدرات العددية باستخدام برنامج MathCAD. حيث تضمن البحث تطبيق عددي لثلاث عينات مولدة عشوائيا بأحجام وقيم وسطاء مختلفة خاضعة للتوزيع نصف المنطقي.

الكلمات المفتاحية: نماذج التعجيل، نموذج معكوس القوة، التوزيع نصف المنطقي، بيانات مرتقبة من النوع الثاني، مقدر المعقولية العظمى.

ورد للمجلة بتاريخ / / ٢٠١١

قبل للنشر بتاريخ / / ٢٠١١

١. المقدّمـــــــة:

السبب الرئيسي لاستعمال نماذج الحياة المعجلة (Accelerated Life Test) هو تطور التكنولوجيا الحديثة، الذي يؤدي إلى زيـــادة موثوقية الأجهزة. في نماذج الحياة المعجلة توضع العناصر تحـت ظـــــــــــروف بيئيــــــــــــة شـــــــــــــديدة (أكثر ضغطا من الظروف الطبيعية) بحيـث تسـتبق زمـن فشـل العناصر المدروسة.

بتحديد العلاقة بين الشدة (الضغط) والوسطاء لتوزيـع زمـن الحياة (النموذج المعجل)، يمكننا تقدير الوسطاء في الظروف غيـر الاعتيادية، وبالاعتماد عليها يمكننا تقدير الوسطاء فـي الظـروف الاعتيادية.

عالج كثير من العلماء نماذج الحياة المعجلة، أمثـال Nelson (1990) الذي وضع نماذج وطرقا إحصائية لنماذج الحياة المعجلة، والعلماء Elsayed و (1998) Chen الذين طوروا فـي بحـثهم الأخير نماذج الحياة المعجلة تحت ظروف اختبار عديدة، والعلمـاء Caruso و (1998) Dasgupta الذين قدموا عرضا تحليليا كاملا لنماذج الحياة المعجلة.

هناك العديد من الدراسات التي اسـتخدمت مقـدر المعقوليـة العظمى (Maximum Likelihood Estimation) لتقدير وسـطاء توزيعات الحياة ووسطاء نماذج الحياة المعجلة، حيـث قـام العـالم (1995) Glaser بعرض النموذج المعجل لتوزيع الحيـاة وايبـل بحيث أنه قام بتقدير وسيطي المقياس والشكل في التراكيب الخطيـة لتوابع الضغط باستخدام مقدر المعقولية العظمى، كما استخدم العـالم (1998) Xiong طرق المعقولية العظمى لتقدير وسـطاء نمـوذج بسيط لخطوة الضغط (Step Stress Model) مع بيانات موقوفـة

من النوع الثاني (Type II Censored) معتمدين على توزيع الحياة الأسي، والعلماء (Abdel-Ghaly et al, 1998) عرضوا تقدير وسطاء توزيع باريتو ودالة الموثوقية باستخدام اختبار الحياة المعجل مع بيانات مرتقبة من النوع الثاني.

٢. نماذج عملية التعجيل:

أولا – نموذج معكوس القوة:

Power Inverse Law Model

يستخدم هذا النموذج في المركبات الكهربائية وكذلك العوازل الكهربائية ويكون شكل النموذج:

$$\theta = C / V^{P}$$

حيث: θ وسيط المجتمع لهذا التوزيع و V عامل الضغط، و C ثابت و P قوة الضغط. وغالبا ما تكون C و P وسطاء مجهولة يتم تقديرها.

ثانيا – نموذج Arrehenius Reaction : يستخدم هذا النوذج في المواد التي تتأثر بعملية التقادم (التآكل) والتي تتأثر كذلك بعامل الحرارة وتستخدم في المواد شبه الموصلة ويكون شكل النموذج:

$$\theta = e^{-\left(A - BV^{-1}\right)}$$

علما أن: A وB وسطاء يتم تقديرها

وهذه النماذج يتم تحديدها أو تحديد آلية استخدامها بواسطة العاملين في المجالات العلمية المختلفة.

وعند استخدام إحدى نماذج التعجيل يشترط ألا تغير من طبيعة المادة المدروسة ولكن تؤثر عليها فقط عن طريق وسطاء التوزيع (العددي Scale والشكل Shape).

وسوف نهتم في بحثنا هذا في تقدير وسطاء التوزيع Half-Logistic باستخدام النموذج (أولا) مع بيانات مرتقبة من النوع الثاني Type II censored data.

٣. التوزيع نصف المنطقي Half Logistics Distribution:

تم وضع هذا التوزيع لأول مرة من قبل العالم Balakrishnan عام ١٩٨٥ كنموذج لاختبار الحياة. ما يميز هذا التوزيع هو أن له معدل موت متزايد من أجل جميع قيم وسطائه.

إذا كان X متغير عشوائي خاضع للتوزيع المنطقي فإن $Y=|X|$ خاضع للتوزيع نصف المنطقي. تأخذ دالة الكثافة الشكل الآتي:

$$f(y)=\frac{2e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}}}{\sigma\left[1+e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}}\right]^2} \qquad ; y \geq \mu > 0, \sigma > 0 \quad (١)$$

علما أن μ و σ هما وسطاء التمركز والمقياس على الترتيب. انظر: (Gile, 2009) كما أن دالة التوزيع التراكمية:

$$F(y)=\frac{1-e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}}}{1+e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}}} \qquad ; y \geq \mu > 0, \sigma > 0 \qquad (٢)$$

وبجعل $\frac{y-\mu}{\sigma}=z$ في العلاقة (١) نحصل على:

$$f(z)=\frac{2e^{-z}}{\left[1+e^{-z}\right]^2} \qquad ; z \geq 0$$

$$R(z)=\frac{2e^{-z}}{1+e^{-z}}\ ,\ h(z)=\frac{1}{1+e^{-z}}$$

حيث R(z) هي دالة الموثوقية Reliability Function

و h(z) هي دالة المجازفة Hazard Function .

عزوم التوزيع:

تعطى العزوم المركزية للتوزيع نصف المنطقي المعياري بالاستفادة من الصيغة التي استنتجها (Gradshteyn, and :Ryzhik, 1994; integral 3.424, no.2)

$$\int_0^{\infty}\frac{(1+a)\,e^{x}+a}{\left(1+e^{x}\right)^2}e^{-ax}\,x^{n}\,dx=n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(a+k+1)^n} \qquad (٣)$$

بجعل $Z=(Y-\mu)/\sigma$ في العلاقة (١) نجد دالة الكثافة:

$$f(z)=\frac{2e^{-z}}{\left[1+e^{-z}\right]^2}\ ;\ z>0 \qquad (٤)$$

و نجد: $$E(Z^r)=2\int_0^{\infty}\frac{z^r e^{-z}}{\left[1+e^{-z}\right]^2}dz$$

بتطبيق (٣) مع أخذ a=0 و n=r نجد:

$$E(Z^r)=2r!\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)^{-r} \qquad (٥)$$

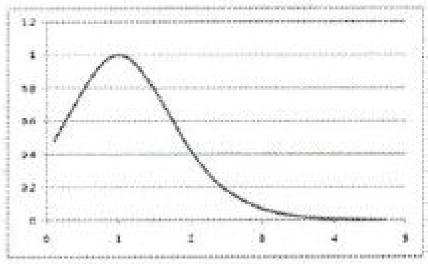
كما وضعوا صيغة أخرى للعلاقة (٥) – انظر Balakrishnan and Wong (1991, p. 140) – باستخدام سلسلة Maclaurin للمقدار $\ln(1+\omega)$ مع $\omega=1$، وبالتالي $E(Z)=\ln(4)$.

ومنه : $E(y)=\mu+\sigma\ln(4)$

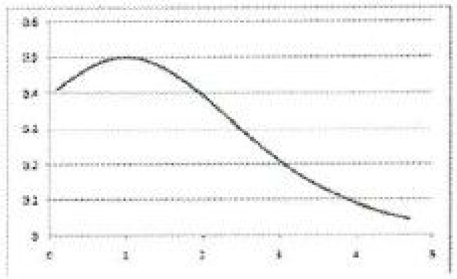
أما عزوم Y بشكل عام فتعطى بالطبع اعتمادا على العلاقة (٥) بتطبيق نظرية الثنائية:

$$E\left(Y^{r}\right)=2r!\sigma^{r}\sum_{j=0}^{r}C_{j}^{r}\left(\mu/\sigma\right)^{r-j}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\left(k+1\right)^{-j} \quad (٦)$$

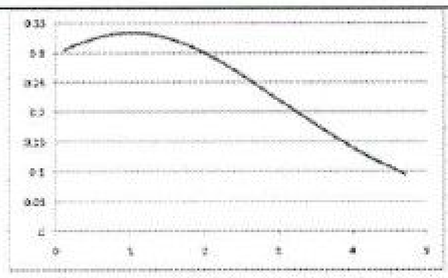
الرسوم البيانية لدالة الكثافة:



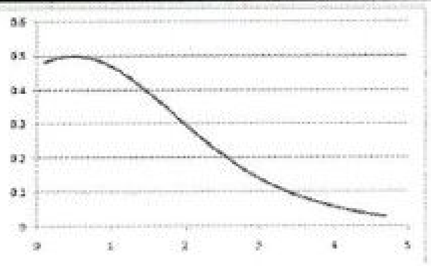
$\mu=1,\sigma=0.5$



$\mu=1,\sigma=1$



$\mu=1,\sigma=1.5$



$\mu=0.5,\sigma=1$

٤. طريقة المعقولية العظمى مع بيانات مرتقبة من النوع الثاني:

نفرض أنه لدينا عينة عشوائية $T_1,T_2,\dots T_n$ مسحوبة من مجتمع له دالة الكثافة (١) فإذا كان معدل عمر الوفاة لهذا التوزيع:

$$E(T)=\mu+\sigma\ln(4)$$

حيث هنا σ أكثر تأثيرا في عمر المركبة (المدروسة) وبالتالي فإن نموذج التعجيل يأخذ الشكل:

$$\sigma=C/V^{P} \quad (٧)$$

وتكون عندئذ دالة المعقولية العظمى وبأخذ نوع البيانات (الارتقاب من النوع الثاني) يكون:

$$L=\prod_{i=1}^{r} f\left(t_i\right)\left[1-F\left(t_r\right)\right]^{n-r} \qquad (٨)$$

حيث أن r تمثل عدد الوحدات التي تم تحديد الارتقاب عندها. وباستخدام المعادلات (١) و (٢) و (٨) نحصل على دالة المعقولية العظمى:

$$L=\prod_{i=1}^{r} \frac{2V^{P} e^{-\frac{V^{P}\left(t_i-\mu\right)}{C}}}{C\left[1+e^{-\frac{V^{P}\left(t_i-\mu\right)}{C}}\right]^{2}}\left[\frac{2 e^{-\frac{V^{P}\left(t_r-\mu\right)}{C}}}{1+e^{-\frac{V^{P}\left(t_r-\mu\right)}{C}}}\right]^{n-r} \qquad (٩)$$

وحيث أن Ln L دالة تزايدية باضطراد.

عندها يكون تقدير الوسيط μ هو:

$$\hat{\mu}=\min\left(t_1,\ldots,t_r\right)=t_{(1)}$$

المعادلات الآنية:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial P}=0 \ldots (a) \quad , \quad \frac{\partial \ln L}{\partial C}=0 \ldots (b)$$

حيث أن المعادلتين a و b غير صريحتين لتقدير قيم الوسطاء P وC ، فإنه يلزم حلها عدديا.

وللحصول على مجال ثقة للوسطاء المقدرة P وC وحيث أنه لا توجد دالة صريحة لهما فإننا نستخدم تقريب دالة المعقولية العظمى التي تؤول إلى التوزيع الطبيعي وسوف نحتاج إلى معرفة وسطاء هذا التوزيع ومن خصائص دالة المعقولية العظمى نجد أن المعدل للتوزيع الطبيعي (النهاية) معدوم وذات تباين نحصل عليه من مقلوب مصفوفة معلومات فيشر، حيث أن:

$$I = \begin{bmatrix} -E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial P^2}\right) & -E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial P \partial C}\right) \\ -E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial P \partial C}\right) & -E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial C^2}\right) \end{bmatrix}$$

ومن الصعب الحصول على دالة التقدير لهذه الوسطاء، ولذا اتفق على استبدال كلا من القيمة المجهولة للوسيط بالقيمة المقدرة لها وذلك في مصفوفة المعلومات لفيشر على الشكل:

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial P^2}\right)\Bigg|_{\substack{P=\hat{P} \\ C=\hat{C}}}$$

وهكذا ...

وتصبح فترات الثقة في هذه الحالة وذلك بمعلومية مستوى الثقة $100(1-\alpha)\%$ هي:

$$\hat{P} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{V\,(P)}$$
$$\hat{C} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{V\,(C)}$$

حيث V(P) و V(C) نحصل عليها من مقلوب مصفوفة معلومات فيشر.

وبعد حساب القيمة المقدرة لمعاملات التعجيل وبالتعويض في المعادلة (٧) نحصل على التقدير النقطي للوسيط σ وكذلك على فترة ثقة له.

وحيث أن دالة الموثوقية هي:

$$R(t) = \frac{2e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}}{1+e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}}\,,\;\; t \geq \mu, \sigma > 0 \;\; ...(*)$$

وباستبدال كل وسيط بالقيمة المقدرة له نحصل على تقدير لدالة الموثوقية (*)

التطبيق العددي:

حيث tr هي مصفوفة أزمنة الأحداث التي وقعت (غير المرتقبة) والمولدة عشوائيا والتابعة للتوزيع نصف المنطقي.

تم توليد القيم العشوائية باستخدام الدالة العكسية لدالة التوزيع، والتي تعطى بالعلاقة:

$$t = \mu - \sigma.\ln\left(-\frac{Rnd - 1}{Rnd + 2}\right)$$

حيث Rnd قيمة عشوائية ما واقعة في المجال (0,1)

n	r	μ	σ	tr	V	$\hat{C}$	$\hat{P}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
30	10	2	1	2.787 7.217 3.734 2.938 4.507 3.694 4.074 3.321 2.86 4.454	1.25	3	5	2.71	0.983
40	15	1	0.5	2.07 2.373 2.074 1.486 1.587 1.901 1.807 2.058 2.959 1.478 1.842 1.549 1.851 2.378 2.065	1.41	3	5.169	1.478	0.508
50	20	0.5	0.25	0.917 0.854 0.951 1.474 0.832 0.806 1 0.687 0.902 0.798 1.031 0.995 0.687 1.007 1.25 0.759	1.92	0.989	2.122	0.687	0.248

ودالة الموثوقية المقدرة الموافقة للحالات الثلاث السابقة هي:

- $$\hat{R}(t)=\frac{2e^{-\frac{t-2.71}{0.983}}}{1+e^{-\frac{t-2.71}{0.983}}}\ ,\ t>2.71$$
- $$\hat{R}(t)=\frac{2e^{-\frac{t-1.478}{0.508}}}{1+e^{-\frac{t-1.478}{0.508}}}\ ,\ t>1.478$$
- $$\hat{R}(t)=\frac{2e^{-\frac{t-0.687}{0.248}}}{1+e^{-\frac{t-0.687}{0.248}}}\ ,\ t>0.687$$

الخلاصة:

نظراً لأهمية هذا التوزيع في الحياة العملية فقد تم حل مسألة التقدير للوسطاء وتم تقدير دالة الموثوقية وهذه النتائج العددية جيدة وموضوعية مستخدمين برنامج MathCAD.

المراجع:

1. Abdel-Glaly A.A. , Attia A.F. and Aly H.M. , (1998), **"Estimation of the Parameters of Pareto distribution and Reliability Function Using Accelerated Life Testing with Censoring"** , Communication Statistics and Simulation, v. 27, n. 2, p 469-484.
2. Caruso H. and Dasguputa A. (1998), **"Fundamental Overview of Accelerated Testing Analytical Models"**, Journal of the IEST, vol. 41, No. 1, 16-20.
3. Glaser R. E. , (1995), **"Weibull Accelerated Life Testing with Unreported Failures"**, IEEE Transactions on Reliability, v. 44, n. 1, p. 31-36.
4. Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. W. (1994). **Table of Integrals, Series, and Products** (ed. A.Jeffrey), 5th ed. New York: Academic Press.
5. David E. Giles, (2009) **"Bias Reduction for the Maximum Likelihood Estimator of the Scale Parameter in the Half-Logistic Distribution"** Econometrics Working Paper EWP0901 University of Victoria.
6. Elsayed E. and Chen A. C. , (1998), **"Recent Research and Current Issues in Accelerated Testing"**, Proceeding of the IEEE international conference on systems man. And cybernetics, part 5, 4704-4709.
7. Nelson, w. (1990); **"Accelerated Testing Statistical Models, Test, Plans, and Analysis"**, John Wiley & Sons.
8. Xiong C. , (1998), **"Inference on a Simple Step Stress Model with Type II Censored Exponential Data"**, IEEE Transaction on Reliability, v. 47, n. 2, p. 142. 142 – 146.

Estimating of Parameters of Half-Logistic Distribution using Accelerated Life Testing based on Type II Censored Data

Abstract:

We presented in this research accelerated models, and we used Power Inverse Law Model in estimating Half-Logistic Distribution based on Type II censored data using maximum likelihood estimator. We calculated the numerical values of estimators using MathCAD program. This research is included numerical application for three random samples generated with different size and estimators' values that belong to Half-Logistic Distribution population.

Keywords: accelerated models, used Power Inverse Law Model, Half-Logistic Distribution, Type II censored data, maximum likelihood estimator.