التكرار الهندسي لطيف مسألة ديرخليه "غير الملساء" على البيان الهندسي

د. منير الترك

قسم العلوم الأساسية

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

جامعة دمشق

الملخص

ندرس على البيان الهندسي Γ، مسألة القيم الحدية الطيفية:

$$\left.\begin{aligned} &(p(x)u')' - q(x)u = \lambda r(x)u \;, \qquad (x\in\Gamma) \\ &u\big|_{\partial\Gamma} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

حيث p و q و r دوال ذات قيم حقيقية و p و r دوال موجبة و λ وسيط طيفي.

نفرض أن الدالة u تحقق في العقد الداخلية للبيان Γ الشرط:

$$\sum_{\gamma_i} \alpha_i(x) u_i'(x) = k(x) u(x)$$

حيث $\alpha_i(x)$ و $k(x)$ أعداد موجبة، والمجموع محسوب على كل الأضلاع γ_i التي لها الطرف x و $u_i'(x)$ مشتق الدالة u عند x على الضلع γ_i، بالاتجاه من x.

ندرس بالتوافق مع المسألة (*) المسألة $(*_j)$، الناتجة عن المسألة (*) باستبدال Γ بـ Γ_j الذي يعبّر عن أحد التراكيب المترابطة من المجموعة $\Gamma\setminus\{c\}$ حيث c عقدة داخلية للبيان Γ و $j=1,2,\dots,l$.

نفرض $\chi(\lambda)$ تكرار هندسي للقيمة الذاتية λ للمسألة (*) و $\chi_j(\lambda)$ تكرار هندسي للقيمة الذاتية نفسها λ للمسألة $(*_j)$. عندئذ يكون الفرق $\left[\chi(\lambda)-\sum_{j=1}^{l}\chi_j(\lambda)\right]$ مساوياً للصفر أو للناقص واحد.

الكلمات المفتاح: مسألة ديريخليه، قيمة ذاتية، بيان.

التكرار الهندسي لطيف مسألة ديريخليه "غير الملساء" على البيان الهندسي

1- مقدمة: تطورت نظرية المعادلات التفاضلية على البيان الهندسي- graph (الشبكة الفضائية) كثيراً في العشرين سنة الأخيرة (Покрный et all.,2004). وتعد النجاحات الأهم تلك التي حصلت في نظرية المعادلات التفاضلية الخطية (عادية أو جزئية). غير أن بعض العقبات أعاقت سرعة هذا التطور، ولم تدرس هذه العقبات كفاية. سنتطرق في عملنا هذا لاحدى هذه العقبات المتعلقة بنظرية طيف المسألة الحدية لمعادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية على البيان الهندسي.

نتابع في عملنا مابدأناه في (Аль-Турк, 1995)، حيث نعمم بعض نتائج (Завгородный et all.,1992) إلى الحالة التي يكون فيها Γ بيان يحوي، حلقات. حيث تم في (Завгородный et all.,1992) إيجاد العلاقة بين التكرار الهندسي للقيمة الذاتية λ لمسألة القيم الحدية الطيفية على البيان الهندسي Γ في حالة Γ شجرة، مع التكرار الهندسي للقيمة الذاتية λ على البيان الجزئي Γ_j، حيث Γ_j مجموعة مترابطة من المجموعة $\Gamma \setminus \{c\}$ و c عقدة داخلية ما للبيان Γ. كما دُرِست القيم الذاتية الحقيقية فقط في (Завгородный et all.,1992) و (Аль-Турк, 1995)، بينما نناقش هنا الحالة العامة- القيم الذاتية العقدية.

2- صياغة المسألة: إن المفاهيم المعروضة لاحقاً، كالبيان الهندسي والدالة الفضولة على البيان، هي نفسها المعروضة في (Покрный et all.,2004) و (الترك، 2010).

ليكن $\gamma_i = \{(1-t)a_i + tb_i \; ; \; a,b \in R^n, 0<t<1\}$ حيث $i = 1,2,\ldots,m$ و $\gamma_i \cap \overline{\gamma}_j = \phi$، و $\overline{\gamma}_j$ غلاقة γ_j في R^n و $i \neq j$. ولتكن J مجموعة أطراف المجالات المشتركة لمجالين على الأقل من المجالات γ_j.

نسمي المجموعة $\Gamma=\left(\bigcup_{i=1}^{m}\gamma_i\right)\cup J(\Gamma)$ بيان هندسي مفتوح (شبكة فضائية)- اختصارا بيان. سنفرض دائما أن Γ مجموعة مترابطة. نسمي نقاط J عقداً داخلية للبيان Γ ونسمي بقية أطراف المجالات التي لا تنتمي الى J عقداً حدية لهذا البيان. ونرمز لمجموعة العقد الحدية للبيان Γ بالرمز $\partial\Gamma$. وسنفرض دائماً أن $\partial\Gamma\neq\phi$.

نسمي المجالات γ_i أضلاع البيان Γ وسنرمز لاجتماعها بالرمز $R(\Gamma)$. اذا كانت a عقدة داخلية للبيان Γ فإننا نرمز بـ $I(a)$ للمجموعة $I(a)=\{i=1,2,..,m\ ;a\in\overline{\gamma_i}\}$ أي مجموعة أدلة الاضلاع γ_i التي لها الطرف a. نأخذ النظيم الاقليدي في R^n والتبولوجيا المولدة منه. إن المجموعة الجزئية من البيان Γ التي تشاكل الدائرة نسميها حلقة في Γ. وسنفرض أن البيان Γ يحوي، في الحالة العامة، حلقات.

ندرس دوال ذات قيم عقدية معرفة على Γ أو على $R(\Gamma)$. ليكن $x\in\gamma_i$ والدالة u معرفة في جوار لهذه النقطة (الجوار بالمعنى التوبولوجي على Γ). عندئذ، فإن $u'(x)$ يعني مشتق الدالة u عند x بالاتجاه $h_i=b_i-a_i$، أي

$$u'(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{u(x+\varepsilon h_i)}{\varepsilon}$$

تعريف: اذا كان المشتق $u'(x)$ موجود، فاننا نقول إن الدالة u فضولة عند x.

نلاحظ انه اذا كانت الدالة p قابلة للاشتقاق عند $x\in R(\Gamma)$، فان قيمة العبارة $(pu')'(x)$ غير متعلقة باي طرف من أطراف الضلع γ_i سنرمز له بالرمز a_i وايها سنرمز له بالرمز b_i.

مسألة البحث: إن الموضوع الأساسي المدروس في هذا البحث هو دراسة مسألة القيم الحدية:

$$-(pu')'(x)+q(x)u=\lambda r(x)u \quad ; \quad x\in R(\Gamma) \qquad (1)$$

$$u\big|_{\partial\Gamma}=0 \qquad (2)$$

حيث λ وسيط طيفي عقدي. إن حل هذه المسألة هو الدالة ذات القيم العقدية u معرفة ومستمرة على البيان Γ (بما فيها عند العقد الداخلية من J) وتحقق في العقد الداخلية للبيان المساواة

$$\sum_{i\in I(a)}\alpha_i(a)u_i'(a)=k(a)u(a) \quad ; \quad a\in J(\Gamma) \qquad (3)$$

حيث $\alpha_i(a)$ و $k(a)$ أعداد موجبة معلومة.

سنفرض ان المعاملات r و q و p في المعادلة (1) هي دوال حقيقية تحقق الشروط:

a- الدوال r و q و p' دوال مستمرة بانتظام على كل اضلاع البيان Γ.
b- $\inf\{p(x)\ :\ x\in R(\Gamma)\}>0$
c- $\inf\{r(x)\ :\ x\in R(\Gamma)\}>0$

3- الصيغ والبراهين:

لتكن c عقدة داخلية للبيان Γ و l عدد تراكيب المجموعة المترابطة $\Gamma\backslash\{c\}$ (ربما يكون $l=1$ عندما تكون c تنتمي الى حلقةٍ ما من البيان Γ. سنرمز لهذه التراكيب بالرموز $\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_l$.

وندرس المسألة

$$\left.\begin{aligned} -(pu')'(x)+q(x)u &= \lambda r(x)u \quad ; \; x\in\Gamma_j \\ u|_{\Gamma_j} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (j)$$

ليكن $\chi(\lambda)$ التكرار الهندسي للقيمة الذاتية λ لمسألة القيم الحدية (1) و(2). وليكن $\chi_j(\lambda)$ التكرار الهندسي للقيمة الذاتية λ للمسألة (j).

اذا لم تكن λ قيمة ذاتية لمسألة القيم الحدية (1) و(2) (أو للمسألة (j))، فإننا نفرض $\chi(\lambda)=0$ (وبالمقابل $\chi_j(\lambda)=0$).

نعرّف، أخيراً من أجل كل دليل j ($j=1,2,\dots,l$) المجموعة:

$$I_j=\left\{i\in I(c)\,;\,\gamma_i\subseteq\Gamma_j\right\}$$

مبرهنة 1 (Аль-Турк M., 1995): ليكن، من أجل عددٍ ما j_0، يوجد حل للمسألة (j_0) يحقق العلاقة:

$$\sum_{i\in I_{j_0}}\alpha_i(c)u_i'(c)\neq 0 \qquad (4)$$

وليكن أي حل للمسألة (1) و (2) ينعدم عند c. عندئذٍ تتحقق المساواة:

$$\chi=\sum_{j=1}^{l}\chi_j-1 \qquad (5)$$

مبرهنة 2 (Аль-Турк M., 1995): ليكن، من أجل عددٍ ما j_0، يوجد حل للمسألة (j_0) يحقق العلاقة (4)، ولنفرض وجود حل للمسألة (1) و(2) لا ينعدم عند c. عندئذٍ تتحقق المساواة:

$$\chi=\sum_{j=1}^{l}\chi_j \qquad (6)$$

مبرهنة 3: بفرض ان أي حل للمسألة (j) يحقق العلاقة:

$$\sum_{i\in I_j}\alpha_i(c)u_i'(c)=0 \qquad ; \ \forall j=1,2,\dots,l \qquad (7)$$

ويفرض ان أي حل للمسألة (1) و (2) ينعدم عند c. عندئذٍ تكون (6) محققة.

مبرهنة 4: أياً يكن j $(j=1,2,\dots,l)$، فإن أي حل للمسألة (j) يحقق (7). ولنفرض وجود حل للمسألة (1) و (2) لا ينعدم عند c. عندئذٍ تتحقق المساواة:

$$\chi=\sum_{j=1}^{l}\chi_j+1 \qquad (8)$$

ليكن E فضاء جميع حلول المسألة (1) و (2).

توطئة 1(Аль-Турк M., 1995): وليكن θ دالي خطي ما معرّف على E. ولتكن $\phi^1,\phi^2,\dots,\phi^s$ حلولاً مستقلة خطياً للمسألة (1) و (2) بحيث يكون $\theta(\phi^1)\neq 0$. عندئذٍ يوجد حلول $\psi^1,\psi^2,\dots,\psi^s$ للمسألة (1) و (2) مستقلة خطياً تحقق العلاقات:

$$\theta(\psi^1)=1 \ , \ \theta(\psi^j)=0 \ ; \ j=2,3,\dots,s \qquad (9)$$

لاثبات صحة المبرهنتين 3 و 4 يلزمنا اثبات صحة التوطئة:

توطئة 2: ليكن $c\in J$، وليكن لاجل كل j، فإن حل المسألة (j) يحقق المساواة (7). عندئذٍ

$$\dim E_0=\sum_{j=1}^{l}\chi_j \qquad (10)$$

البرهان: ليكن

$$\chi_j=0 \qquad ; \qquad j=1,2,\dots,l \qquad (11)$$

ليكن $y \in E_0$. عندها أياً تكن $j = 1,2,\ldots,l$ ، فان الدالة $y|_{\Gamma_j}$ تمثل حل للمسألة (j). وهذا يعني من (11) أن هذا الحل صفري أياً تكن $j = 1,2,\ldots,l$. وعليه، فإن y صفري، أي أن $\chi = 0$ ، وعليه فإن (11) تعطي (10).

نفرض الان أن (11) غير محققة.

نرمز بالرمز J_1 لمجموعة الادلة $j = 1,2,\ldots,l$ التي يكون من اجلها $\chi_j > 0$ ، وكل حل للمسألة (j) يحقق العلاقة:

$$\sum_{i \in I_j} \alpha_i(c) u_i'(c) = 0$$

واضح ان $J_1 \neq \phi$.

مهما تكن $j \in J_1$ ، فإنه توجد في فضاء الحلول للمسألة (j) قاعدة $\{\phi_1^j, \phi_2^j, \ldots, \phi_{\chi_j}^j\}$.

نرمز بالرمز J_2 لمجموعة الادلة $j = 1,2,\ldots,l$ التي يكون من اجلها $\chi_j > 0$ ، وكل حل للمسألة (j) يحقق العلاقة:

$$\sum_{i \in I_j} \alpha_i(c) u_i'(c) = 0$$

مهما تكن $j \in J_1 \cup J_2$ ، فإنه توجد في فضاء الحلول للمسألة (j) قاعدة $\{\phi_1^j, \phi_2^j, \ldots, \phi_{\chi_j}^j\}$. يمكن ان نفرض انه لكل دليل j من J_1 تتحقق العلاقات:

$$\theta_j(\phi_1^j) = 1 \quad , \quad \theta_j(\phi_t^j) = 0 \quad ; \quad t = 2,3,\ldots,\chi_j$$

حيث إن الدالي θ_j معرّف بالعلاقة $\theta_j = \sum_{i \in I_j} \alpha_i(c) \phi_i'(c)$.

ندرس الدوال

$$v_t^j = \begin{cases} \phi_t^j(x) \ , & x \in \Gamma_j \\ 0 \ , & x \in \Gamma \setminus \Gamma_j \end{cases} \quad ; \quad j \in J_1 , t = 1,2,\dots ,\chi_j \qquad (12)$$

التي هي دوال ذاتية للمسألة (1) و(2). إن عدد هذه الدوال هو

$$\sum_{j \in J_1} \chi_j = \sum_{j=1}^{l} \chi_j$$

لنبين الاستقلال الخطي لهذه الدوال. ليكن

$$\sum_{j \in J_1} \sum_{t=1}^{\chi_j} c_t^j v_t^j(x) = 0 \quad ; \quad x \in \Gamma \qquad (13)$$

نأخذ مقصور هذه المساواة على البيان الجزئي Γ_j حيث $j \in J_1$، فنجد من العلاقات (12):

$$\sum_{t=1}^{\chi_j} c_t^j \phi_t^j(x) = 0 \quad ; \quad x \in \Gamma_j \quad , \quad j \in J_1$$

و لما كانت الدوال φ_t^j مستقلة خطياً، فإن

$$c_t^j = 0 \quad , \quad j \in J_1 \quad ; \quad t = 1,2,\dots \ ,\chi_j \qquad (14)$$

وهذا يعني الاستقلال الخطي للدوال (12) .

يتبقى برهان انه أياً تكن الدالة y من E_0، فانه يعبّر عنها كتركيب خطي للدوال (12).

ليكن $y \in E_0$، عندئذٍ أياً تكن $j = 1,2,\dots ,l$، فإن الدوال $y|_{\Gamma_j}$ هي حلول للمسألة (j)، وهذا يعني أنه لكل $j \in J_2 \cup (J_1 \setminus \{1\})$ توجد الاعداد العقدية μ_t^j (ايا يكن $t = 1,2,\dots ,\chi_j$) بحيث يكون

$$y\big|_{\Gamma_j} = \sum_{t=1}^{\chi_j} \mu_t^j \varphi_t^j(x) \qquad (15)$$

وهكذا فإنه ومن (12) تنتج المساواة

$$y = \sum_{j \in J_2} \sum_{t=1}^{\chi_j} \mu_t^j v_t^j$$

وهو المطلوب.

برهان المبرهنة 3: من شروط المبرهنة نجد أن $E = E_0$ ، ومن التوطئة 2، نجد صحة المبرهنة 3.

برهان المبرهنة 4: ليكن v حل، غير صفري عند c، للمسألة (1) و (2). نطبق التوطئة 1 على الدالي $\theta(u) = u(c)$ فنجد انه توجد في E القاعدة $\{v_1, v_2, \dots, v_\chi\}$ بحيث يكون $v_1(c) = 1$ و $v_t(c) = 0$ (أياً تكن $t = 2,3,\dots,\chi$). ينتج من التوطئة 2 أن قياس الغلاف الخطي للدوال $\{v_2, v_3, \dots, v_\chi\}$ مساوٍ للعدد $\sum_{j=1}^{l} \chi_j$، أي أن $\chi - 1 = \sum_{j=1}^{l} \chi_j$، وهو ما يثبت صحة المبرهنة 4.

المراجع

1 - **الترك منير، 2010- مسألة الطيف الموجب لاحدى مسائل القيم الحدية على البيان الهندسي**. مجلة جامعة البعث، مجلد 32.

2- Аль-Турк М., 1995- **Осцилляционные свойства негладких уравнений на сетях**. Диссертация, Воронеж,136 p.

3- Покрный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шапров С.А., 2004- **Дифференциалные**

уравнения на геометрических графах. Физматлит, Россия, 272 p.

4 -Покрный Ю.В., Пенкин О.М., 1989- **О Теоремах сравнения для уравнений на графах**. Дифференциалные уравнения, (25) 7, 1141-1150.

5 -Завгородный М.Г., Аль- Обейд А., Прядиев В.Л., 1992- **Геометрическая кратность собственных значений задачи Дирихле на графе.** *Деп. в ВИНИТИ*, № 2821-*В*92, 8 С.

Geometric multiplicity of the spectrum for the "discontinuous" Dirichlet problem on a geometric graph

ABSTRACT

Consider, on the geometric graph Γ, the spectral boundary value problem:

$$\left.\begin{array}{c} (p(x)u')' - q(x)u = \lambda r(x)u \quad , \quad (x \in \Gamma) \\ u|_{\partial\Gamma} = 0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

Where p , q and r are the positive functions, q is the real valued function and λ is a spectral parameter.

Suppose that function u satisfies a boundary condition in every internal node a of Γ

$$\sum_{\gamma_i} \alpha_i(x) u_i'(x) = k(x) u(x)$$

Where $\alpha_i(x)$ and $k(x)$ are fixed and positive numbers. The summation is performed over the edges γ_i adjoin to the vertex x and $u_i'(x)$ denotes the "boundary" derivative of u at the end x of the edges γ_i in the direction "from x".

We study with the problem $(*)$ the problem $(*_j)$ replacing Γ by Γ_j where Γ_j is the component of the connected set $\Gamma \setminus \{c\}$ where c is an internal node of Γ ; $j = 1, 2, \ldots, l$.

Suppose that $\chi(\lambda)$ is a geometric multiple for λ as an eigenvalue for the problem $(*)$ and $\chi_j(\lambda)$ is a geometric

multiple for λ as an eigenvalue for the problem $(*_j)$. Then the difference $\left[\chi(\lambda)-\sum_{j=1}^{l}\chi_j(\lambda)\right]$ equals 0 or -1 .

Key words: *Dirichlet problem, eigenvalue, Graph.*