حول التقريب المنتظم لــ x^n في فضاء كثيرات الحدود الجبرية P_{n-1}

د.جمال مللي [1] ، د.صفوان زيزون [2] ،رهف الدكاك [3] .

(1) قسم الرياضيات -كلية العلوم - جامعة دمشق -الجمهورية العربية السورية
(2) قسم الرياضيات -كلية العلوم - جامعة دمشق -الجمهورية العربية السورية
(3) قسم الرياضيات -كلية العلوم - جامعة دمشق -الجمهورية العربية السورية

الملخص

يعد الرياضي الروسي تشيبتشيف مؤسس نظرية التقريب المنتظم ،وقد قام بإيجاد حدودية التقريب الأمثل من الدرجة $n-1$ للدوال x^n في كل من الفضائين $C[-1,1]$ و $C[0,1]$،وذلك بواسطة حدوديات تشيبتشيف.

و قد قمنا في هذا العمل بإيجاد حدودية التقريب الأمثل لهذه الدوال في فضاء كثيرات الحدود الجبرية P_{n-1} ولكن على المجالات $[-a,a]$ و $[0,a]$ ومن ثمّ استفدنا من متناوبات تشيبتشيف لهذه الدوال ومن خواص الدالة العكسية في إيجاد متناوبات الدوال ذات الشكل : $F(x)=\sqrt[n]{x}$ على المجال $[0,a]$ إذا كان n عدداً طبيعياً،و على المجال $[-a,a]$ إذا كان n عدداً طبيعياً فردياً. و من ثمّ إيجاد حدودية التقريب الأمثل لهذه الدّوال في الفضاء P_{n-1} على تلك المجالات .

الكلمات المفتاح : دالة مستمرة -حدودية التقريب الأمثل - كثيرات حدود تشيبتشيف متناوبات تشيبتشيف- الدالة العكسية.

1–المقدمة :

تعالج مسألة التقريب في فضاء منظم $\mathbb{X}$ مزوّد بتابع المسافة أو النظيم d تحديد نقطة أو مجموعة نقاط من فضاء $\mathbb{U}$ جزئي من $\mathbb{X}$ بحيث يكون بُعد هذه النقط أصغرياً عن النقطة $f \in \mathbb{X}$.

أي إيجاد النقط g_0 التي تحقق :

$$\delta = d(f, g_0) = inf\{d(f, g); \forall g \in \mathrm{U}\}$$

2– أهمية البحث:

يستمد هذا البحث أهميته من توسيع مجال التقريب المنتظم للدالة x^n في الفضاء P_{n-1} من المجالين $[0,1]$ و $[-1,1]$ إلى المجالين $[0, a]$ و $[-a, a]$،وأيضاً في وضع طريقة هندسية لإيجاد عنصر التقريب الأمثل للدوال $\sqrt[n]{x}$ في الفضاء P_{n-1} على المجال $[0, a]$إذا كان n عدداً طبيعياً وعلى المجال $[-a, a]$ إذا كان n عدداً طبيعياً فردياً.

3– موارد وطرائق البحث:

اعتمدنا في هذا البحث على المراجع العلمية المتخصصة في نظرية التقريب المنتظم وبخاصة في الفضاء $C[a, b]$ ، واعتمدنا التعميم والأسلوب الاستنتاجي والاستفادة من بعض الخواص الهندسية وتطبيقاتها في استخلاص استنتاجاتنا.

4– التقريب المنتظم :

هو تقريب الدوال المعرّفة والمستمرة على مجال حقيقي مغلق $[a, b]$ وذلك وفق النظيم :

$$\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b}|f(x)| \ ; \ \forall f \in C[a, b]$$

حيث يرمز لفضاء هذه الدوال بـــ $C[a, b]$.

لتكن $f \in C[a,b]$ وليكن الفضاء الجزئي $U = P_n$ فضاء كثيرات الحدود الجبرية من الدرجة n على الأكثر ، ولتكن كثيرة الحدود $p \in P_n$ ، يعرّف انحراف الدالة f عن كثيرة الحدود$p(x)$ بـ :

$$\Delta(p) = \max_{a \le x \le b} |p(x) - f(x)|$$

و إذا مسحت كثيرة الحدود p كامل المجموعة P_n عندئذ ستشكل مجموعة القيم $\Delta(p)$ مجموعةً محدودةً من الأدنى و أكبر حد أدنى لها هو:

$E_n = E_n(f) = inf_{p \in P_n} \{\Delta(p)\}$ والذي يدعى بالانحراف الأصغري للحدوديات التي تنتمي إلى P_n عن الدالة f أو التقريب الأمثل للدالة f بحدودية من P_n.

تعريف (1):

لتكن $f \in C[a,b]$ ، وليكن $U \subset C[a,b]$ فضاءً جزئيا بعده n وليكن$g_0 \in U$.

تعرّف متناوبات تشيبتشيف لـ $f - g_0$ بأنّها متتالية النقط $a \le t_1 \le \cdots \le t_{n+1} \le b$ التي تحقق :

$$f(t_i) - g_0(t_i) = -[f(t_{i+1}) - g_0(t_{i+1})], i = 1, \ldots, n \quad (1)$$
$$|f(t_k) - g_0(t_k)| = \|f - g_0\|_\infty, k = 1, \ldots, n+1 \quad (2)$$

المبرهنة (1):

ليكنU فضاءً جزئياً من $C[a,b]$ بعده n ولتكن الدالة $f \in C[a,b]$ ،وليكن $g_0 \in U$.

يكون g_0 عنصر التقريب الأمثل لـ f في الفضاء U إذا وجد $(n + 1)$ نقطة متناوبة لـ $f - g_0$.

البرهان انظر في [3] .

تعريف (2):

تعرّف كثيرة الحدود :

$$T_n(x) = \cos(n\, arc\cos x) \text{ ، حيث } -1 \le x \le 1$$

بأنّها كثيرة حدود تشيبتشيف من النوع الأول T_n .

وبوضع $\cos\theta = x$ يكون $T_n(x) = \cos(n\,\theta)$.

ولكثيرات حدود تشيبتشيف الصيغة التكرارية :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad n = 1,2,\ldots$$

وتبلغ هذه الحدودية قيمتها العظمى عند $n+1$ نقطة هي :

$(k = 0,1,\ldots,n)$ $x_k = \cos\frac{k}{n}\pi$ حيث تعطي القيم المتعاقبة $(-1)^k$.

المبرهنة (2):

تنحرف الحدودية $\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\, arc\cos x)$

انحرافاً أصغرياً عن الصفر في المجال$[-1,1]$ ،وذلك من بين جميع الحدوديات ذات الدرجة n و التي معاملها القيادي هو الواحد .

البرهان : انظر في [6] .

نتيجة (1) :

إنّ الحدودية $p_{n-1}(x) = x^n - 2^{1-n}T_n(x)$ هي حدودية التقريب الأمثل لـــ x^n في P_{n-1} على المجال $[-1,1]$ ، و المتناوبات هي

$x_k = \cos k\frac{\pi}{n}$ $\quad k = 0,1,\ldots,n$.

تعريف (3):

تُعرّف الحدودية $T_n^*(x) = T_n(2x-1)$ حيث $x \in [0,1]$ بـــ كثيرة حدود تشيبتشيف أحادية الجانب $T_n^*(x)$ (shifted) ، ولهذه الحدودية الصيغة التكرارية:

$$T_n^*(x) = 2(2x-1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x) \text{ .}$$

حيث : $\quad T_0^*(x) = 1 \quad , \quad T_1^*(x) = 2x - 1$

وتكون حدودية التقريب الأمثل لـ x^n إلى P_{n-1} على المجال $[0,1]$ هي :

$p_{n-1}(x) = x^n - 2^{1-n}T_n^*(x)$ و المتناويات $x_k = cos^2\frac{\pi k}{2n}; k = 0,1,..,n$

4- النتائج والمناقشة:

يأتي تفصيل العمل الذي أنجزناه في الفقرتين التاليتين:

5- توسيع مجالات حدودية التقريب الأمثل :

تعريف (4) :

لتكن $x \in [-a,a]; a \neq 0$ عندئذ:

$$-a \leq x \leq a \;\Rightarrow\; -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$$

لنضع : $\cos\theta = \frac{x}{a}$ ، ونفرض:

$$\widehat{T_n}(x) = \cos n\theta \;;\; \theta \in [0,\pi], x \in [-a,a]$$

نجد:

$$\widehat{T_0}(x) = \cos 0 = 1$$
$$\widehat{T_1}(x) = \cos\theta = \frac{x}{a}$$
$$\widehat{T_2}(x) = \cos 2\theta = 2(\cos\theta)^2 - 1 = 2\frac{x^2}{a^2} - 1$$
$$\widehat{T_3}(x) = \cos 3\theta = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta = 4\frac{x^3}{a^3} - 3\frac{x}{a}$$

وتكون الصيغة التكرارية:

$$\widehat{T_n}(x) = 2\frac{x}{a}\widehat{T_{n-1}}(x) - \widehat{T_{n-2}}(x) \qquad (3)$$

إثبات الصيغة التكرارية:

حسب العلاقة

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta$$

وبتعويض : $\widehat{T_n}(x) = \cos n\theta$ و $\cos\theta = \frac{x}{a}$ نجد:

$$\widehat{T_n}(x) + \widehat{T_{n-2}}(x) = 2\frac{x}{a}\widehat{T_{n-1}}(x)$$

ومنه:

$$\widetilde{T_n}(x) = 2\frac{x}{a}\widetilde{T_{n-1}}(x) - \widetilde{T_{n-2}}(x)$$

المبرهنة (3):

تنحرف الحدودية $\widetilde{T_n}(x) = \frac{a^n}{2^{n-1}}\widetilde{T_n}(x)$

انحرافاً أصغرياً عن الصفر في المجال $[-a,a]$ ،وذلك من بين جميع الحدوديات ذات الدرجةn و التي معاملها القيادي هو الواحد .

الإثبات:

لتكن: $H_n(x) = x^n - (a.x^{n-1} + b.x^{n-2} + \cdots + r)$.

وبفرض: $p(x) = a.x^{n-1} + b.x^{n-2} + \cdots + r$.

حسب المبرهنة (1) تمثل $p(x)$ التقريب الأمثل لـــ x^n على $[-a,a]$ إذا وجدت $n+1$ نقطة متناوبة:

$$-a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le a$$

بحيث يأخذ $H_n(x)$ عند هذه النقط قيمته العظمى المطلقة بإشارات متناوبة عند الانتقال من x_k إلى x_{k+1} حيث : $k = 0,1,\dots,n$.

ولإثبات أنّ $\widetilde{T_n}(x)$ هي التقريب الأمثل للصفر سنثبت وجود هذه المتناوبات.

بوضع: $\theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{n}, \theta_2 = \frac{2\pi}{n}, \dots, \theta_k = \frac{k\pi}{n}$.

نجد: $\cos n\theta_k = (-1)^k$.

ومن أجل $k = 0,1,\dots,n$; $x_k = a\cos\theta_k = a\cos\frac{k\pi}{n}$.

يكون: $\widetilde{T_n}(x) = \frac{a^n}{2^{n-1}}(-1)^k$

و أيضاً:

$$\left\|\widetilde{T_n}(x) - 0\right\|_\infty = \max_{-a\le x\le a}\left|\widetilde{T_n}(x)\right| = \max_{-a\le x\le a}\left|\frac{a^n}{2^{n-1}}\cos n\theta\right| = \frac{a^n}{2^{n-1}}$$

إذاً أخذ الفرق بين $\tilde{T}_n(x)$ والصفر عند النقط السابقة قيمته العظمى بإشارات متناوبة فهي حدودية التقريب الأمثل للصفر وبالتالي هي حدودية الانحراف الأصغري عن الصفر.

نتيجة(2):

حدودية التقريب الأمثل لـــلدالة x^n في فضاء كثيرات الحدود الجبرية P_{n-1} على المجال $[-a,a]$ هي:

$$p_{n-1}(x) = x^n - \frac{a^n}{2^{n-1}}\tilde{T}_n(x) \qquad (4)$$

وحسب صيغة $\tilde{T}_n(x)$ وكون الحد القيادي لها هو x^n نلاحظ أنّ درجة حدودية التقريب الأمثل لـــ x^n زوجية إذا كان n زوجياً وفردية إذا كان n فردياً.

نتيجة(3):

المتناوبات لـــ (4) هي:

$$x_k = a\cos\frac{k\pi}{n}\ ;\ k = 0,1,\dots,n \qquad (5)$$

مثال (1):

لإيجاد حدودية التقريب الأمثل للدالة $f(x) = x^3$ في الفضاء P_2 على المجال $[-2,2]$، نعوض في (4) نجد:

$$p_2(x) = x^3 - \frac{2^3}{2^{3-1}}\tilde{T}_3(x) = x^3 - \frac{2^3}{2^{3-1}}\left[4\left(\frac{x}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$p_2(x) = 3x$$

أما المتناوبات فهي: $x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2$

والفروقات عند هذه المتناوبات:

$$f(x_0) - p_2(x_0) = (2)^3 - 3(2) = +2$$
$$f(x_1) - p_2(x_1) = (1)^3 - 3(1) = -2$$
$$f(x_2) - p_2(x_2) = (-1)^3 - 3(-1) = +2$$
$$f(x_3) - p_2(x_3) = (-2)^3 - 3(-2) - 2$$

نتيجة(4):

بإجراء التحويل $s = 2x - 1$ نحصل على حدودية تشيبتشف $\widetilde{T_n^*}(x)$على المجال $[0,a]$ ويكون : $\widetilde{T_n^*}(x) = \widetilde{T_n}(2x - a)$

ويكون :

$$\widetilde{T_0^*}(x) = 1, \widetilde{T_1^*}(x) = \frac{2x-a}{a}, \widetilde{T_2^*}(x) = \frac{2(2x-a)^2}{a^2} - 1$$
$$\widetilde{T_3^*}(x) = \frac{4(2x-a)^3}{a^3} - 3\left(\frac{2x-a}{a}\right)$$

والصيغة التكرارية: $\widetilde{T_n^*}(x) = 2\left(\frac{2x-a}{a}\right)\widetilde{T_{n-1}^*}(x) - \widetilde{T_{n-2}^*}(x)$

ويتضح من الصيغة التكرارية أن الحدودية $\widetilde{T_n^*}(x)$ فردية إذا كان n زوجياً و زوجية إذا كان n فردياً .

وتكون حدودية التقريب الأمثل لــ x^n إلى P_{n-1} على المجال $[0,a]$ هي :

$$p_{n-1}(x) = x^n - \frac{a^n}{2^{2n-1}}\widetilde{T_n^*}(x) \quad (6)$$

و المتناويات $x_k = acos^2\frac{k\pi}{2n}; k = 0,1,2,\dots,n \quad (7)$

مثال(2):

لإيجاد حدودية التقريب الأمثل للدالة $f(x) = x^2$ في الفضاء P_1على المجال $[0,2]$،

نعوض في (5) نجد:

$$p_1(x) = x^2 - \frac{2^2}{2^{4-1}}\widetilde{T_2^*}(x) = x^2 - \frac{2^2}{2^{4-1}}\left[2\left(\frac{2x-2}{2}\right)^2 - 1\right]$$
$$p_1(x) = 2x - \frac{1}{2}$$

أما المتناوبات فهي: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$

والفروقات عند هذه المتناوبات:

$$f(x_0) - p_2(x_0) = (2)^2 - 2(2) + \frac{1}{2} = +\frac{1}{2}$$
$$f(x_1) - p_2(x_1) = (1)^2 - 2(1) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$f(x_2) - p_2(x_2) = (0)^2 - 2(0) + \frac{1}{2} = +\frac{1}{2}$

مثال (3):

لإيجاد حدودية التقريب الأمثل للدالة $f(x) = x^3$ في الفضاء P_2 على المجال $[0,4]$،

نعوض في (6) نجد:

$$p_2(x) = x^3 - \frac{4^3}{2^{6-1}}\widetilde{T_3}(x) = x^3 - \frac{2^6}{2^5}\left[4\left(\frac{2x-4}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{2x-4}{4}\right)\right]$$

$$p_2(x) = 6x^2 - 9x + 2$$

أما المتناوبات فهي: $x_0 = 4, x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 0$

والفروقات عند هذه المتناوبات:

$f(x_0) - p_2(x_0) = 64 - 96 + 36 - 2 = +2$

$f(x_1) - p_2(x_1) = 27 - 54 + 27 - 2 = -2$

$f(x_2) - p_2(x_2) = 1 - 6 + 9 - 2 = +2$

$f(x_3) - p_2(x_3) = 0 - 2 = -2$

6- التقريب الأمثل للدالة $F(x) = \sqrt[n]{x}$:

الحالة الأولى على المجال $[0, a]$:

في هذه الحالة يمكن أن يكون n أي عدد طبيعي .

نلاحظ أن الدالة $\sqrt[n]{x}$ نظيرة الدالة $f(x) = x^n$ بالنسبة للمستقيم $y = x$ (الدالةالعكسية)

و حسب خواص التناظر بالنسبة لمنصف الربع الأول تكون متناوبات $F(x)$ هي $f(x_k)$ حيث x_k متناوبات $f(x)$ المعرفة بالعلاقة (6) و بالتالي متناوبات الدالة $F(x)$ هي :

$$x_{k'} = f(x_k) = a^n \cos^{2n} k\frac{\pi}{2n} \quad k = 0,1,\dots,n \quad (8)$$

ولتكن $p_{n-1}(x) = ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + r$ حدودية التقريب الأمثل من الدرجة $n-1$.

باختيار n معادلة من جملة المعادلات التالية يتم تحديد امثال حدودية التقريب الأمثل :

$$F(x_{k'})-p_{n-1}(x_{k'})=-[F(x_{j'})-p_{n-1}(x_{j'})]$$

حيث$j',k'=1,\dots,n$ و$(k'\neq j')$ إحداهما فردي و الآخر زوجي .

$$F(x_{k'})-p_{n-1}(x_{k'})=F(x_{j'})-p_{n-1}(x_{j'})$$

حيث $j',k'=1,\dots,n$ و$(k'\neq j')$ زوجيان أو فرديان معاً .

مثال (4):

لتكن الدالة $F(x)=\sqrt[3]{x}$ لإيجاد حدودية التقريب الأمثل في الفضاء P_2على المجال $[0,1]$

أولاً :حسب (8) تكون مواضع المتساويات على محور الفواصل :

$$x_0=1,\ x_1=\frac{27}{64},x_2=\frac{1}{64},\ x_3=0$$

و يكون: $p_2(x)=ax^2+bx+c$ و

$$F(x_0)-p_2(x_0)=1-a-b-c \qquad (9)$$
$$F(x_1)-p_2(x_1)=\frac{3}{4}-\frac{729}{4096}a-\frac{27}{64}b-c \quad (10)$$
$$F(x_2)-p_2(x_2)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4096}a-\frac{1}{64}b-c \quad (11)$$
$$F(x_3)-p_2(x_3)=-c \qquad (12)$$

ثانياً: بحل المعادلات

$(9)=-(12)$ و$(11)=-(10)$ و $(9)=(11)$ نجد أنّ حدودية التقريب الأمثل هي:

$$p_2(x)=-\frac{2048}{1197}x^2+\frac{2992}{1197}x+\frac{253}{2394}$$

ويكون للفرق بين الدالة $F(x)=\sqrt[3]{x}$ وحدودية التقريب الأمثل لها عند مواضع المتساويات السابقة القيم التالية المتناوبة بالإشارة :

$$F(x_0)-p_2(x_0)=\frac{253}{2394}$$
$$F(x_1)-p_2(x_1)=-\frac{253}{2394}$$

$$F(x_2)-p_2(x_2)=\frac{253}{2394}$$
$$F(x_3)-p_2(x_3)=-\frac{253}{2394}$$

مثال (5):

لتكن الدالة $F(x)=\sqrt[3]{x}$ لإيجاد حدودية التقريب الأمثل لهذه الدالة في الفضاء P_2 على المجال $[0,4]$.

أولاً :حسب (8) تكون مواضع المتناوبات على محور الفواصل :

$$x_0=64,\ x_1=9, x_2=1,\ x_3=0$$

و يكون: $p_2(x)=ax^2+b\,x+c$ و

$$F(x_0)-p_2(x_0)=4-4096a-64b-c \qquad (13)$$
$$F(x_1)-p_2(x_1)=3-81a-9b-c \qquad (14)$$
$$F(x_2)-p_2(x_2)=1-a-b-c \qquad (15)$$
$$F(x_3)-p_2(x_3)=-c \qquad (16)$$

ثانياً: بحل المعادلات

$(13)=-(14)$ و $(14)=-(15)$ و $(14)=(16)$ نجد أنّ حدودية التقريب الأمثل هي:

$$p_2(x)=-\frac{1}{196}x^2+\frac{233}{588}x+\frac{184}{588}$$

ويكون للفرق بين الدالة $F(x)=\sqrt[3]{x}$ و حدودية التقريب الأمثل لها عند مواضع المتناوبات السابقة القيم التالية المتناوبة بالإشارة :

$$F(x_0)-p_2(x_0)=\frac{184}{588}$$
$$F(x_1)-p_2(x_1)=-\frac{184}{588}$$
$$F(x_2)-p_2(x_2)=\frac{184}{588}$$

$F(x_3) - p_2(x_3) = -\frac{184}{589}$

الحالة الثانية على المجال $[-a, a]$:

في هذه الحالة يجب أن يكون n عدداً طبيعياً فردياً .
وأيضاً بما أنّ الدالة $\sqrt[n]{x}$ نظيرة الدالة $f(x) = x^n$ بالنسبة للمستقيم $y = x$ (الدالة العكسية) و حسب خواص التناظر بالنسبة لمنصف الربع الأول تكون متناوبات $F(x)$ هي $f(x_k)$ حيث x_k متناوبات $f(x)$ المعرّفة بالعلاقة (4) و بالتالي متناوبات الدالة $F(x)$ هي :

$$x_{k'} = f(x_k) = x_k^n = a^n \cos^n k\frac{\pi}{n} \; ; k = 0,1, \dots, n \quad (17)$$

ولتكن $p_{n-1}(x) = ax^{n-2} + bx^{n-1} + \cdots + r$ حدودية التقريب الأمثل من الدرجة $n-1$ وذلك لأنّه حسب ما سبق حدودية التقريب الأمثل لـ x^n على $[-a, a]$ من الدرجة $n-2$ حيث إنّ $P_{n-2} \subset P_{n-1}$.
باختيار n معادلة من جملة المعادلات التالية يتم تحديد امثال حدودية التقريب الأمثل :

$$F(x_{k'}) - p_{n-1}(x_{k'}) = -[F(x_{j'}) - p_{n-1}(x_{j'})]$$

حيث $j', k' = 1, \dots, n$ و $(k' \neq j')$ إحداهما فردي و الآخر زوجي .

$$F(x_{k'}) - p_{n-1}(x_{k'}) = F(x_{j'}) - p_{n-1}(x_{j'})$$

حيث $j', k' = 1, \dots, n$ و $(k' \neq j')$ زوجيان أو فرديان معاً .

مثال (6):

لتكن الدالة $F(x) = \sqrt[3]{x}$ لإيجاد حدودية التقريب الأمثل على المجال $[-2, 2]$
أولاً :حسب (17) تكون مواضع المتناوبات على محور الفواصل :

$$x_0 = 8, \; x_1 = 1, x_2 = -1, \; x_3 = -8$$

و يكون: $p_2(x) = a\,x + c$ و

$$F(x_0) - p_2(x_0) = 2 - 8a - b \qquad (18)$$
$$F(x_1) - p_2(x_1) = 1 - a - b \qquad (19)$$

$$F(x_2) - p_2(x_2) = -1 + a - b \qquad (20)$$
$$F(x_3) - p_2(x_3) = -2 + 8a - b \qquad (21)$$

ثانياً: بحل المعادلات

$(18) = -(19)$ و $(18) = (20)$ نجد أنّ حدودية التقريب الأمثل هي:

$$p_2(x) = \frac{1}{3}x$$

ويكون للفرق بين الدالة $F(x) = \sqrt[3]{x}$ و حدودية التقريب الأمثل لها عند مواضع المتناوبات القيم التالية المتناوبة بالإشارة:

$$F(x_0) - p_2(x_0) = -\frac{2}{3}$$
$$F(x_1) - p_2(x_1) = \frac{2}{3}$$
$$F(x_2) - p_2(x_2) = -\frac{2}{3}$$
$$F(x_3) - p_2(x_3) = \frac{2}{3}$$

7- النتائج والتوصيات:

1) تحديد حدودية التقريب المنتظم المثلى لـ x^n في الفضاء P_{n-1} على المجالين $[0,a]$ و $[-a,a]$ وتحديد متناوبات تشيبتشيف للفرق بين هذه الدالة وعنصر التقريب الأمثل.
2) إيجاد التقريب الأمثل للدوال $\sqrt[n]{x}$ في الفضاء P_{n-1} على المجال $[0,a]$إذا كان n عدداً طبيعياً وعلى المجال $[-a,a]$ إذا كان n عدداً طبيعياً فردياً، وأيضاً يقدم إيجاد هذه الحدودية طريقة لإيجاد الدالة العكسية للحدودية :

$$p_{n-1}(x) = x^n - \frac{a^n}{2^{n-1}}\overline{T_n}(x)$$

والتي لا توجد خوارزمية عامة لإيجادها.

3) محاولة الاستفادة من متناوبات تشيبتشيف لـ $x^n - p_{n-1}$ و من متناوبات تشيبتشيف لـ $\sqrt[n]{x} - P_{n-1}(x)$ (حيث $P_{n-1}(x)$ هي حدودية التقريب الأمثل لـ $\sqrt[n]{x}$) في بعض مسائل الاستيفاء .
4) البحث في إيجاد التقريب الأمثل لـ x^n على أي مجال $[a,b]$.

المراجع

[1] CHENEY,Ee.w.,1998 - **Introduction to Approximation Theory** , AMS CHELSEAPUBLTSHING .pp[54-49].

[2] Phillips M George.,2003 - **Interpolation and Approximation by Polynomials** . Springer Verlag -New York .Inc.pp[144-149].

[3] Msson, J.C, .D.C. Handscomb .,2003- **CHEBYSHEV Polynomials,** .Baco Ruton London New York Washington ,D.C.pp[55-61].

[4] Cladislav K.Dzyadyz,Igor A.Shevchunk., 2008,**Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials.**Walter de Gruyter . Berlin .New York .pp[4-12].

[5] Hans Sagan.,2002- **Advanced Calculus.** Houghton Mifflin Company • Boston.pp[66-70].

[6] I.P.NATANSON,1964,**Constructive Function Theory**.Frederick Ungr Publishing CO.New York .pp[38-44].

About The Uniform Approximation Of The Function x^n To The Space Of Algebraic Polynomials P_{n-1}

Dr Jamal Melli (1),Dr Safoan Zayzon (2) and rahaf al dakak (3)

(1) **Department of Mathematics – Faculty of Science –University of Damascus - Syria**

(2) **Department of Mathematics – Faculty of Science –University of Damascus - Syria**

(3) **Department of Mathematics – Faculty of Science –University of Damascus - Syria**

ABSTRACT

Chebyshev, The Russian mathematician, is considered as the furniture of the theory of the uniform approximation. He found The polynomial of the best uniform approximation for the functions x^n in both the spaces $C[-1,1]$ and $C[0,1]$ By means of Chebyshev's polynomials.

In this paper we have found The element of the best uniform approximation for this function on the intervals $[-a,a]$ and $[0,a]$ .Then we have benefited from Chebyshev alternative on these intervalls and from the inverse function to find the alternative to the functions of the form: $F(x) = \sqrt[n]{x}$ on the interval$[0,a]$ if n is natural number ,and on the interval $[-a,a]$ if n is an odd natural number. Then we found the polynomial of best uniform approximation of these functions on those intervals .

Key words :continuous function –polynomial of best approximation Chebyshev polynomials – Chebyshev alternative-Inverse function.