بعض خواص دالة غرين لمسألة قيم حدية لمعادلات تفاضلية

من مراتب متنوعة على البيان الهندسي

صفا العلي الكاطع
طالبة ماجستير
قسم الرياضيات
كلية العلوم
جامعة حلب
دير الزور

أ.م.د. محمد عمر كردي
مشرف
قسم الرياضيات
كلية العلوم
جامعة حلب
حلب

أ.د. معاذ عبد المجيد
مشرف مشارك
قسم العلوم الأساسية
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
جامعة دمشق
دمشق

بعض خواص دالة غرين لمسألة قيم حدية لمعادلات تفاضلية من مراتب متنوعة على البيان الهندسي

الملخص

ندرس بعض خواص دالة غرين وخصوصاً، الاستمرار المنتظم لهذه الدالة ووحدانيتها، وذلك من أجل مسألة قيم حدية لمعادلة تفاضلية عادية من المرتبة الرابعة على بيان هندسي، تُعبّر عن الاهتزازات المرنة لجملة مؤلفة من 3 قضبان تشكل حلقة و 3 أوتار مرتبطة مع القضبان في رؤوس الحلقة، ومستندة استناداً مرناً في هذه الرؤوس:

$$
\begin{aligned}
&(p_i u_i'')'' - (q_i u_i')' = f_i && ; \quad i = 1,\dots,6 \\
&u_i(a) - u_j(a) = 0 && ; \quad i, j \in I(a)\ ,\ a \in J(\Gamma) \\
&(p_i u_i'')(a) = 0 && ; \quad i \in I(a)\ ,\ a \in J(\Gamma) \\
&\sum_{i \in I(a)} \left[q_i u_i' - (p_i u_i'')' \right](a+0) - k(a)u(a) = 0 && ; \quad a \in J(\Gamma) \\
&u(b) = 0 && ; \quad b \in \partial\Gamma
\end{aligned}
$$

ويُعد هذا العمل متابعة لعمل سابق تم فيه إثبات وجود ووحدانية حل هذه المسألة وكذلك إيجاد دالة غرين لها.

الكلمات المفتاحية: دالة غرين، معادلة تفاضلية، بيان هندسي.

بعض خواص دالة غرين لمسألة قيم حدية لمعادلات تفاضلية من مراتب متنوعة على البيان الهندسي

1- المقدمة: إن مسائل القيم الحدية من أجل معادلات تفاضلية عادية من المرتبة الثانية على البيان الهندسي درست جيداً منذ ثمانينات القرن العشرين، حيث تم إيجاد شروط الوجود والوحدانية لحلها وصياغة مبرهنات شتورم لها ودراسة دالة غرين لها، مثلاً (POKORNYI and BOROVSKIKH, 2004). وقد ظهرت هذه المسائل عند وصف جمل من الأوتار مرتبطة بعضها ببعض. وكذلك درست الجمل المؤلفة من قضبان مرتبطة بعضها ببعض، حيث إن اهتزازاتها المرنة توصف بمعادلات تفاضلية من المرتبة الرابعة على البيان الهندسي (LAGNESE et al., 1993) (BOROVSKIKH and LAZAREV, 2004). وبدأ في العقد الأخير دراسة مسائل من نوع آخر، حيث إن الجمل المدروسة تحوي أوتار وقضبان معاً، مما يعني أن المسألة الحدية التي توصف الاهتزازات المرنة لهذه الجملة يُعبر عنها بمعادلات تفاضلية عادية من المرتبة الثانية على بعض أضلاع البيان وبمعادلات من المرتبة الرابعة على البعض الآخر(LAZAREV and BELOGLAZOVA, 2006).

ندرس في هذا العمل مسألة قيم حدية لمعادلات تفاضلية عادية من المرتبة الرابعة على بيان هندسي، تُعبّر عن الاهتزازات المرنة لجملة مؤلفة من 3 قضبان تشكل حلقة و 3 أوتار مرتبطة مع هذه القضبان في رؤوس الحلقة، ومستندة استناداً مرناً في هذه الرؤوس، بحيث إن مسقط هذه الجملة على مستوٍ موازٍ هو بيان هندسي (انظر الشكل لاحقاً) (كردي وآخرون، 2010)، حيث ندرس بعض خواص دالة غرين وخصوصاً، الاستمرار المنتظم لهذه الدالة ووحدانيتها وهو تعميم لما ورد في (POKORNYI et al., 2003).

2- مفاهيم أساسية: نذكّر بالتعاريف الأساسية لنظرية مسائل القيم الحدية على البيان الهندسي (POKORNYI and BOROVSKIKH, 2004).

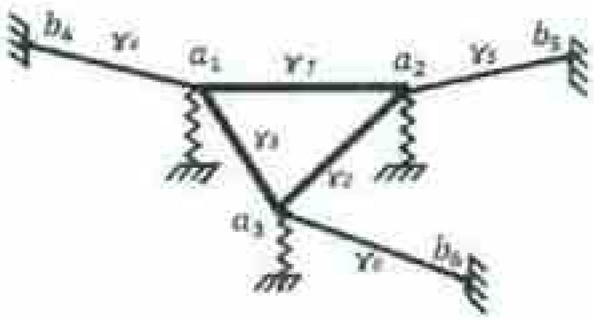
نعرف المشتق عند أي عقدة a من عقد البيان Γ بالنهاية:

$$u_i'(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\gamma_i}} u_i'(x)$$

نرمز لمجموعة الدوال المستمرة بانتظام على γ_i والتي لها مشتقات مستمرة بانتظام حتى المرتبة n بالرمز $C^n(\gamma_i)$.

3- المسألة المدروسة:

ندرس الاهتزازات البسيطة لجملة مادية تقع في مستو ما مؤلفة من ثلاثة قضبان تشكل مثلث، وثلاثة أوتار كل منها مرتبط بأحد رؤوس المثلث من طرف، ومثبت من الطرف الآخر، وبحيث تستند رؤوس المثلث بشكل مرن (الاستناد على شكل نابض) – انظر الشكل



إن مسقط هذه الجملة على مستوٍ موازٍ لمستوي الجملة المادية يُعبّر عنه ببيان هندسي Γ.

يعبر عن هذه الاهتزازات بمسألة القيم الحدية التالية:

$$(p_iu_i'')''-(q_iu_i')'=f_i \qquad ; \quad i=1,\dots,6 \qquad (1)$$

$$u_i(a)-u_j(a)=0 \qquad ; \quad i,j\in I(a), a\in J(\Gamma) \qquad (2)$$

$$(p_iu_i'')(a)=0 \qquad ; \quad i\in I(a), a\in J(\Gamma) \qquad (3)$$

$$\sum_{i\in I(a)}\left[q_iu_i'-(p_iu_i'')'\right](a+0)-k(a)u(a)=0 \qquad ; \quad a\in J(\Gamma) \qquad (4)$$

$$u(b)=0 \qquad ; \quad b\in\partial\Gamma \qquad (5)$$

البيان الهندسي Γ في R^3 هو اجتماع مجموعة مجالات مفتوحة غير متقاطعة مثنى مثنى $\gamma_i = (a_{2i-1}, a_{2i})$، حيث $i = 1,\dots,r$، (تسمى أضلاع البيان) وبعض أطراف هذه المجالات (تسمى العقد الداخلية للبيان)، بحيث يكون هذا الاجتماع مترابط .

نرمز لمجموعة أضلاع البيان Γ بالرمز $[\Gamma]$، ونرمز لمجموعة العقد الداخلية له بالرمز $J(\Gamma)$. أي أن $\Gamma = J(\Gamma) \cup [\Gamma]$.

تسمى أطراف المجالات γ_i التي لا تنتمي إلى $J(\Gamma)$ العقد الحدية للبيان Γ ونرمز لمجموعة العقد الحدية للبيان بالرمز $\partial\Gamma$.

نرمز للمجموعة المؤلفة من العقدة a وجميع أضلاع البيان المرتبطة بها بالرمز $\Gamma(a)$، وبالرمز $I(a)$ للدلالة على مجموعة أدلة أضلاع البيان المرتبطة بهذه العقدة.

إذا كان $l = \|b-a\|$ طول الضلع $\gamma = (a,b)$، فإن المعادلة الوسيطية له هي:

$$x = \varphi(t) = a + t\frac{b-a}{l} \quad ; \quad 0 \le t \le l$$

نعرّف على البيان Γ الدالة الحقيقية $u : \Gamma \to R$، ونرمز لمقصورها على الضلع γ_i بالرمز $u_i(x)$. وباستخدام التمثيل الوسيطي للضلع γ_i نحصل على الدالة $u_i = u(\varphi_i(t))$.

نعرّف مشتق الدالة على البيان كما يلي:

$$u'(x) = \frac{d}{dt}u(\varphi_i(t)) \quad ; \quad x = \varphi_i(t) \quad , \quad 0 \le t \le l_i \quad , \quad i = 1,\dots,r$$

نعرف بأسلوب مشابه، المشتقات من مراتب عليا:

$$u^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dt^k}u(\varphi_i(t)) \qquad ; \quad k = 1,2,3,\dots$$

حيث تمثل الدالة p_i قوة شد القضيب γ_i، حيث $i=1,2,3$ وتمثل الدالة q_i قوة شد الوتر γ_i، حيث $i=4,5,6$ وتمثل الدالة $k(a)$ ثابت مرونة نابض الاستناد في العقدة a. وتعبّر الدالة f المعرفة على Γ والمستمرة بانتظام على الأضلاع γ_i، حيث $i=1,...,6$، عن كثافة القوة المؤثرة على الجملة المدروسة.

نفرض أن $p_i \in C^2(\gamma_i)$ و $p_i > 0$ من أجل $i=1,2,3$ و $p_i \equiv 0$ حيث $i=4,5,6$. و $q_i \in C^1(\gamma_i)$ و $q_i > 0$ من أجل $i=4,5,6$ و $q_i \equiv 0$ حيث $i=1,2,3$.
نرمز للتبسيط بالرمزين $\Gamma_1 = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ و $\Gamma_2 = \gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6$. وكذلك لمجموعة الدوال المستمرة على Γ والتي مشتقاتها مستمرة بانتظام من المرتبة 4 على Γ_1 ومشتقاتها مستمرة بانتظام من المرتبة 2 على Γ_2 بالرمز J.

4- النتائج:

لنعرف المؤثر L، الذي يؤثر على الدالة $u \in J$، بالعلاقة:

$$Lu = (pu'')'' - (qu')'$$

حيث إن مرتبة المؤثر L على كل قضيب تساوي 4 وعلى كل وتر تساوي 2.
باستبدال الأطراف اليسرى للصيغ $(2)-(5)$ بالداليات $l_m(u)$، نحصل على:

$$l_m(u) = 0 \qquad , \qquad m = 1,...,18$$

توجد جملة حلول أساسية للمعادلة $Lu=0$ وهي مؤلفة من حلين مستقلين على كل وتر ومن أربعة حلول مستقلة على كل قضيب. تمدد كل من هذه الدوال بشكل صفري على بقية أضلاع البيان Γ ونرمز للدوال الممددة بالرمز $z_j ; j=1,...,18$. وعليه، فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة:

$$Lu = 0 \qquad (6)$$

يعطى بالعلاقة $u(x)=\sum_{j=1}^{18} c_j z_j(x)$، حيث إن الدوال z_j، من أجل $j=1,\dots,18$ مستقلة خطياً على Γ.

مبرهنة 1 (كردي وآخرون، 2010): للمسألة $(5)-(1)$ حل وحيد إذا وفقط إذا كان: $j,m=1,\dots,18 \quad ; \quad \Delta=\det\left(l_m(z_j)\right)=0$

ويعطى هذا الحل بالعبارة:

$$u(x)=\int_{\Gamma} G(x,s)f(s)ds \tag{7}$$

نسمي $G(x,s)$ دالة غرين لهذه المسألة. وتُعطى هذه الدالة بالعلاقة:

$$G(x,s)=H(x,s)+\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{18}\Delta_i(s)z_i(x) \tag{8}$$

أو

$$G(x,s)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} H(x,s) & z_1(x) & z_2(x) & \dots\dots & z_{18}(x) \\ l_1(H(.,s)) & l_1(z_1) & l_1(z_2) & \dots\dots & l_1(z_{18}) \\ l_2(H(.,s)) & l_2(z_1) & l_2(z_2) & \dots\dots & l_2(z_{18}) \\ & \dots\dots & \dots\dots & & \\ l_{18}(H(.,s)) & l_{18}(z_1) & l_{18}(z_2) & \dots\dots & l_{18}(z_{18}) \end{vmatrix} \tag{9}$$

حيث $H(x,s)$ حل أساسي* للمعادلة المتجانسة (6) على البيان Γ يُعرّف بالصيغة:

---

* ليكن $I=[a,b]$ وليكن Q هو المربع $I\times I$ في المستوي (x,s)، و $\overline{Q}$ هو المثلث $a\le s\le x\le b$ و $\underline{Q}$ هو المثلث $a\le x\le s\le b$. نقول عن الدالة $\pi(x,s)$ أنها حل أساسي للمعادلة $(q(x)u')'+k(x)u=0$ إذا حققت الخواص الآتية: 1- $\pi(x,s)$ مستمرة في Q. 2- في كل من المثلثين $\overline{Q}$ و $\underline{Q}$ يكون المشتقان π_x و π_{xx} موجودين. 3- إن $\pi(x,s)$، لأجل كل قيمة s من I، هي دالة في x وتمثل حلاً للمعادلة $(qu')'+ku=0$ مهما كانت x من $I-\{s\}$. 4- أما على القطر $x=s$ فإن:
$$\pi_x(x+0,x)-\pi_x(x-0,x)=\frac{1}{k(x)}$$

$$H(x,s)=\begin{cases}\widetilde{G}_k(x,s) & , \quad (x,s)\in\gamma_k\times\gamma_k \quad , \quad k=1,\dots,6 \\ 0 & , \quad \text{عدا ذلك}\end{cases} \tag{10}$$

حيث إن $(x,s)\in\gamma_k\times\gamma_k \;\; ; \;\; \widetilde{G}_k(x,s)$ هي دالة غرين للمسائل ثنائية النقطية على كل ضلع $\{\gamma_k \;\; ; \;\; k=1,\dots,6\}$. فمن أجل المسائل ثنائية النقطية على الأضلاع $\gamma_i\subset\Gamma_1$:

$$\begin{cases}(p_iu_i'')''=f_i \\ u_i(a_{2i-1}+0)=u_i(a_{2i}+0)=0 \\ (p_iu_i'')(a_{2i-1}+0)=(p_iu_i'')(a_{2i}+0)=0\end{cases}$$

سنرمز لدالة غرين بالرمز $i=1,2,3 \;\; , \;\; (x,s)\in\gamma_i\times\gamma_i \;\; ; \;\; \widetilde{G}_i(x,s)$.

ومن أجل المسائل ثنائية النقطية على الأضلاع $\gamma_j\subset\Gamma_2$:

$$\begin{cases}-(q_ju_j')'=f_j \\ u_j(a_{2j-1}+0)=u_j(a_{2j}+0)=0\end{cases}$$

سنرمز لدالة غرين بالرمز $j=4,5,6 \;\; , \;\; (x,s)\in\gamma_j\times\gamma_j \;\; ; \;\; \widetilde{G}_j(x,s)$.

مبرهنة 2: إن دالة غرين للمسألة (5) – (1) المعرفة بالصيغة (9) مستمرة بانتظام بجملة المتغيرين على $\Gamma\times\Gamma$.

الإثبات: لما كانت دالة غرين $\{\widetilde{G}_k(x,s) \;\; ; \;\; k=1,\dots,6\}$ مستمرة بانتظام على $\gamma_k\times\gamma_k$، فإنه وفقاً للصيغة (10)، تكون الدالة $H(x,s)$ مستمرة بانتظام على $\Gamma\times\Gamma$. نبين أنه في عناصر العمود الأول للمحدد (9):

$$l_i(H(x,s))\equiv 0 \quad ; \quad \forall s\in\Gamma \quad , \quad i=1,\dots,15$$

بينما يمكن تمديد تعريف الداليات $i=16,17,18$; $l_i(H(x,s))\equiv 0$ لكي تصبح مستمرة بانتظام على Γ.

من أجل l_1، وفقاً للعلاقة (10) يكون:

$$l_1(H(x,s))=\begin{cases}\widetilde{G}_4(a_4+0,s) & , \quad s\in\gamma_4\\ 0 & , \quad s\notin\gamma_4\end{cases}$$

لما كانت $\widetilde{G}_4$ دالة غرين للمسألة ثنائية النقطية على γ_4 (التي تنعدم عند أطرافه)، فإنه لكل $s\in\gamma_4$ يكون $\widetilde{G}_4(a_4+0,s)=0$. وعليه، $l_1(H(x,s))\equiv 0$ على Γ.

بالأسلوب ذاته نبرهن صحة هذه المطابقة من أجل $i=2,3$.

من أجل l_4، وفقاً للعلاقة (10) يكون:

$$l_4(H(x,s))=\begin{cases}\widetilde{G}_1(a_1+0,s) & , \quad s\in\gamma_1\\ \widetilde{G}_3(a_1+0,s) & , \quad s\in\gamma_3\\ 0 & , \quad s\notin\gamma_1\cup\gamma_3\end{cases}$$

لما كانت $\widetilde{G}_1$ و $\widetilde{G}_3$ دالتي غرين للمسألة ثنائية النقطية على γ_1 و γ_3 بالترتيب، فإنه لكل $s\in\gamma_1$ يكون $\widetilde{G}_1(a_1+0,s)=0$، ولكل $s\in\gamma_3$، يكون $\widetilde{G}_3(a_1+0,s)=0$. وعليه فإن $l_4(H(x,s))\equiv 0$ على Γ.

بالأسلوب ذاته نثبت صحة هذه المطابقة من أجل $i=5,...,15$. أما من أجل ما تبقى من داليات ($i=16,17,18$) فإن الدراسة أصعب قليلاً.
من العلاقة (10) يكون:

$$l_{16}(H(x,s))=\begin{cases}\left(p_1\widetilde{G}_1''\right)'(a_1+0,s)+k(a_1)\widetilde{G}_1(a_1+0,s) & ,\ s\in\gamma_1\\ \left(p_3\widetilde{G}_3''\right)'(a_1+0,s) & ,\ s\in\gamma_3\\ -\left(q_4\widetilde{G}_4'\right)(a_1+0,s) & ,\ s\in\gamma_4\\ 0 & ,\ s\notin\gamma_1\cup\gamma_3\cup\gamma_4\end{cases}\qquad(11)$$

نجد من هنا، أن الدالي $l_{16}(H(x,s))$ مستمر بانتظام على γ_1 و γ_3 و γ_4 و $\Gamma\setminus(\gamma_1\cup\gamma_3\cup\gamma_4)$.

تبقى علينا معرفة سلوك الدالي $l_{16}(H(x,s))$ عندما $s\to a_1$.

$$\lim_{\substack{s\to a_1\\ s\in\gamma_1}} l_{16}(H(x,s))=\lim_{\substack{s\to a_1\\ s\in\gamma_1}}\left[\left(p_1(a_1+0)\widetilde{G}_1''(a_1+0,s)\right)'+k(a_1)\widetilde{G}_1(a_1+0,s)\right]$$

لما كانت $\widetilde{G}_1$ دالة غرين للمسألة ثنائية النقطية على γ_1، فإنه مهما تكن $s\in\gamma_1$، فإن $\widetilde{G}_1(a_1+0,s)=0$، وعليه فإن:

$$\lim_{\substack{s\to a_1\\ s\in\gamma_1}} l_{16}(H(x,s))=\lim_{\substack{s\to a_1\\ s\in\gamma_1}}\left(p_1(a_1+0)\widetilde{G}_1''(a_1+0,s)\right)'=\lim_{\substack{(x,s)\to(a_1,a_1)\\ (x,s)\in\Omega_1}}\left(p_1(x)\widetilde{G}_1''(x,s)\right)'$$

حيث $\Omega_1\in\gamma_1\times\gamma_1$ مثلث رؤوسه النقاط (a_2,a_2)، (a_1,a_2)، (a_1,a_1). ولما كان للدالة $\left(p_1\widetilde{G}_1''\right)'$ قفزة مقدارها 1 على القطر $x=s$، فإن:

$$\lim_{\substack{(x,s)\to(a_1,a_1)\\ (x,s)\in\Omega_1}}\left(p_1(x)\widetilde{G}_1''(x,s)\right)'=\lim_{\substack{(x,s)\to(a_1,a_1)\\ (x,s)\in\Omega_2}}\left(p_1(x)\widetilde{G}_1''(x,s)\right)'-1$$

حيث $\Omega_2\in\gamma_1\times\gamma_1$ مثلث رؤوسه النقاط (a_2,a_2)، (a_2,a_1)، (a_1,a_1).

نلاحظ أنه لما كانت الدالة $\left(p_1\widetilde{G}_1''\right)'$ مستمرة بانتظام على المثلث Ω_2 فإن النهاية الأخيرة غير متعلقة بطريق سعي النقطة (x,s) إلى (a_1,a_1). لذا فإنه إذا وضعنا $s = a_1$ نجد:

$$\lim_{\substack{(x,s)\to(a_1,a_1)\\(x,s)\in\Omega_2}}\left(p_1(x)\widetilde{G}_1''(x,s)\right)' - 1 = \lim_{\substack{s\to a_1\\x\in\gamma_1}}\left(p_1(x)\widetilde{G}_1''(x,a_1+0)\right)' - 1$$

لما كانت دالة غرين متناظرة، فإن $\widetilde{G}_1(a_1+0,x)=\widetilde{G}_1(x,a_1+0)$ ، ولما كان $\widetilde{G}_1(a_1+0,x)\equiv 0$ على γ_1، فإن $\widetilde{G}_1(x,a_1+0)\equiv 0$ على γ_1.

ينتج من هنا أن:

$$\lim_{\substack{s\to a_1\\x\in\gamma_1}}\left(p_1(x)\widetilde{G}_1''(x,a_1+0)\right)' - 1 = -1$$

و

$$\lim_{\substack{s\to a_1\\x\in\gamma_1}} l_{16}\left(H(x,s)\right) = -1$$

نجد بأسلوب مشابه:

$$\lim_{\substack{s\to a_1\\x\in\gamma_3}} l_{16}\left(H(x,s)\right) = -1 \qquad , \qquad \lim_{\substack{s\to a_1\\x\in\gamma_4}} l_{16}\left(H(x,s)\right) = -1$$

وهكذا يتم تمديد تعريف الدالي $l_{16}\left(H(x,s)\right)$ بهذه النهايات إلى دالي مستمر بانتظام على Γ.

نتحقق بأسلوب مماثل من أن $l_{17}\left(H(x,s)\right)$ و $l_{18}\left(H(x,s)\right)$ مستمران بانتظام.

وهكذا، نجد من الصيغة (9) ومما سبق أن الدالة $G(x,s)$ مستمرة بانتظام بجملة المتغيرين على المجموعات $\{\gamma_i\times\Gamma; i=1,...,6\}$، طالما أن الدالة $H(x,s)$ مستمرة بانتظام بالنسبة إلى s على Γ، والدوال $\{z_i; i=1,...,18\}$ مستمرة بانتظام على كل ضلع γ_i (حيث $i=1,...,6$). بتطبيق الداليات $\{l_i; i=4,...,9\}$ على طرفي الصيغة

(9) نجد أن الدالة $G(x,s)$ تحقق الشرط: $l_i(G(x,s))=0$ (حيث $i=4,...,9$)، أي أن:

$$G_1(a_1+0,s)\big|_{a_1\in\gamma_1}=G_1(a_1+0,s)\big|_{a_1\in\gamma_3}$$

$$G_1(a_1+0,s)\big|_{a_1\in\gamma_3}=G_1(a_1+0,s)\big|_{a_1\in\gamma_4}$$

وكذلك من أجل العقد الداخلية الأخرى. وهكذا ينتج من هنا:

$$\lim_{\substack{x\to a_1\\ s\in\gamma_1}}G(x,s)=\lim_{\substack{x\to a_1\\ s\in\gamma_3}}G(x,s)=\lim_{\substack{x\to a_1\\ s\in\gamma_4}}G(x,s)\quad;\quad\forall s\in\Gamma$$

ونجد بأسلوب مشابه:

$$\lim_{\substack{x\to a_2\\ s\in\gamma_1}}G(x,s)=\lim_{\substack{x\to a_2\\ s\in\gamma_2}}G(x,s)=\lim_{\substack{x\to a_2\\ s\in\gamma_5}}G(x,s)\quad;\quad\forall s\in\Gamma$$

$$\lim_{\substack{x\to a_3\\ s\in\gamma_2}}G(x,s)=\lim_{\substack{x\to a_3\\ s\in\gamma_3}}G(x,s)=\lim_{\substack{x\to a_3\\ s\in\gamma_6}}G(x,s)\quad;\quad\forall s\in\Gamma$$

وعليه، فإن الدالة $G(x,s)$ مستمرة بانتظام بجملة المتغيرين على $\Gamma\times\Gamma$. وهو المطلوب.

مبرهنة 3: لتكن $G(x,s)$ دالة غرين للمسألة (5)– (1). إذا ثبتنا s كنقطة من $[\Gamma]$ فإن:

1- مهما تكن $x\in[\Gamma]$، يكون المشتقان $\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(x,s)$ $(k=1,2)$ موجودين ومستمرين بانتظام بجملة المتغيرين على كل مجموعة $\gamma_i\times\gamma_j$، من أجل $j=1,...,6$ و $i=1,2,3$.

2- لكل $x\in[\Gamma]$ بحيث $x\neq s$، يكون المشتقان $\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(x,s)$ $(k=3,4)$ موجودين ومستمرين بانتظام على كل مستطيل $\gamma_i\times\gamma_j$ من أجل $j=1,...,6$ و

$i=1,2,3$ و $i \neq j$، وعلى المثلثات الناتجة عن المربع $\gamma_i \times \gamma_i$ من أجل $i = 1, 2, 3$ بعد حذف القطر $daig(\gamma_i \times \gamma_i)$، أي على المثلثات:

$$\{(\gamma_i \times \gamma_i) \setminus daig(\gamma_i \times \gamma_i) \quad ; i = 1,2,3\}$$

3- لكل $x \in [\Gamma]$ بحيث $x \neq s$، يكون المشتقان $\frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x,s)$ $(k=1,2)$ موجودين ومستمرين بانتظام على كل مستطيل $\gamma_i \times \gamma_j$ من أجل $j=1,\dots,6$ و $i=4,5,6$ و $i \neq j$، وعلى المثلثات:

$$\{(\gamma_i \times \gamma_i) \setminus daig(\gamma_i \times \gamma_i) \quad ; i = 4,5,6\}$$

4- إذا كان $s \in \gamma_i$ من أجل $i=1,2,3$، فإن:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(s-0,s) = \frac{\partial}{\partial x} G(s+0,s) \quad \text{و} \quad G(s-0,s) = G(s+0,s)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(s-0,s) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(s+0,s)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,s)\right]_{x=s+0} - \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,s)\right]_{x=s-0} = 1$$

حيث إن المشتقات مأخوذة بالاتجاه من a إلى b (طرفي الضلع γ_i).

5- إذا كان $s \in \gamma_i$ من أجل $i=4,5,6$، فإن:

$$G(s-0,s) = G(s+0,s)$$

$$\left[q(x)\frac{\partial}{\partial x} G(x,s)\right]_{x=s+0} - \left[q(x)\frac{\partial}{\partial x} G(x,s)\right]_{x=s-0} = -1$$

حيث إن المشتقات مأخوذة بالاتجاه من a إلى b (طرفي الضلع γ_i).

6- تحقق الدالة $G(x,s)$ (كدالة في x) المعادلة المتجانسة (6) من أجل $x \neq s$.

7- تحقق الدالة $G(x,s)$ الشروط (5)-(2).

الإثبات:

1- من الصيغتين (10) و (9) ومن خواص دالة غرين $\tilde{G}_i(x,s)$ ومن خواص جملة الحلول الأساسية $\{z_i; i=1,\dots,18\}$ ينتج مباشرة وجود المشتقات $\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(x,s)$ وتكون الصيغة صحيحة:

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(x,s)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{\partial^k H(x,s)}{\partial x^k} & \frac{\partial^k z_1(x)}{\partial x^k} & \frac{\partial^k z_2(x)}{\partial x^k} & \dots\dots & \frac{\partial^k z_{18}(x)}{\partial x^k} \\ l_1(H(.,s)) & l_1(z_1) & l_1(z_2) & \dots\dots & l_1(z_{18}) \\ l_2(H(.,s)) & l_2(z_1) & l_2(z_2) & \dots\dots & l_2(z_{18}) \\ & \dots\dots & \dots\dots & & \\ l_{18}(H(.,s)) & l_{18}(z_1) & l_{18}(z_2) & \dots\dots & l_{18}(z_{18}) \end{vmatrix} \quad (12)$$

وقد برهنا في المبرهنة 2 أن الداليات $\{l_i(H(x,s)) \; ; i=1,\dots,18\}$ مستمرة بانتظام بالنسبة إلى s على Γ.

واضح أن المشتقات $\left\{\frac{\partial^k}{\partial x^k}z_i \; ; \; i=1,\dots,18 \; , \; k=1,2\right\}$، مستمرة بانتظام على كل ضلع $\{\gamma_j \; ; \; j=1,2,3\}$، كذلك المشتقات $\left\{\frac{\partial^k}{\partial x^k}H(x,s) \; ; \; k=1,2\right\}$ مستمرة بانتظام على كل مجموعة $\{\gamma_i\times\gamma_j \; ; \; j=1,\dots,6 \; , \; i=1,2,3\}$. عندئذ من الصيغة (12) تنتج صحة 1.

2- ينتج من الصيغة (10):

$$H(x,s)\equiv 0 \; ; \; \forall(x,s)\in\gamma_i\times\gamma_j \; ; \; j=1,\dots,6 \; , \; i=1,2,3 \; , \; i\neq j$$

وعندئذ من الصيغة (12) نجد الاستمرار المنتظم للمشتقين $\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(x,s)$، $(k=3,4)$ على كل مستطيل $\gamma_i\times\gamma_j \; ; \; j=1,\dots,6 \; , \; i=1,2,3 \; , \; i\neq j$. كما أن الصيغة

(12) صحيحة أياً يكن $(x,s)\notin\gamma_i\times\gamma_i$ من أجل $i=1,2,3$ و $x\neq s$، أضف لذلك فإن $\frac{\partial^k}{\partial x^k}H(x,s)=\frac{\partial^k}{\partial x^k}\tilde{G}_i(x,s)$ $(k=3,4)$ لما كان المشتقان $\frac{\partial^k}{\partial x^k}\tilde{G}_i(x,s)$ ، $(k=3,4)$ مستمرين بانتظام على المثلثات $\{(\gamma_i\times\gamma_i)\setminus daig(\gamma_i\times\gamma_i)\ ;\ i=1,2,3\}$، فإن المشتقين $\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(x,s)$ ، $(k=3,4)$ مستمران بانتظام على هذه المثلثات. وهكذا تكون 2 صحيحة.

يتم إثبات 3 بأسلوب مشابه لإثبات 2.

4- ينتج من المبرهنة 2 ومن إثبات الفقرة الأولى من هذه المبرهنة تتحقق المساواة:

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s-0,s)=\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s+0,s)\ ,\ k=0,1,2\ ,\ \forall s\in\gamma_i\ ,\ i=1,2,3$$

كذلك من الصيغة (12)، من أجل $k=3$ وبمراعاة (10) والمساواة:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p_i(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{G}_i(x,s)\right]_{x=s+0}-\frac{\partial}{\partial x}\left[p_i(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{G}_i(x,s)\right]_{x=s-0}=1\ ;\ \forall s\in\gamma_i\ ,\ i=1,2,3$$

نجد صحة4.

ويتم إثبات 5 بأسلوب مشابه لإثبات 4.

6- نطبق الدالي L على دالة غرين المعرفة بالصيغة (8)، لدينا:

$$G(x,s)=H(x,s)+\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{18}\Delta_i(s)z_i(x)$$

ومنه:

$$LG(x,s)=L(H(x,s))+\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{18}\Delta_i(s)l(z_i(x))$$

من كيفية بناء $H(x,s)$ يكون $L(H(x,s))=0$ من أجل $x\neq s$، ومن كون $\{z_i; i=1,...,18\}$ جملة حلول أساسية للمعادلة المتجانسة (6) ينتج أن: $LG(x,s)=0$، وهذا يعني أن الدالة $G(x,s)$ تحقق المعادلة المتجانسة (6) عندما $x\neq s$.

7- من كيفية بناء الدالة $G(x,s)$ من الصيغة (9) ينتج أن الدالة $G(x,s)$ تحقق بالنسبة إلى x جميع الشروط (5)-(2).

مبرهنة 4: إن دالة غرين $G(x,s)$ للمسألة (5)- (1) تحقق الخواص التالية:

1- عند تثبيت s كعقدة حدية للبيان، أي $s\in\partial\Gamma$، فإن $G(x,s)=0$ مهما تكن x من Γ.

2- عندما يكون $s=a\in J(\Gamma)$ فإن:

أ- $G(x,a)\in J$.

ب- تحقق الدالة $G(x,a)$ المعادلة المتجانسة (6).

ج- تحقق الدالة $G(x,a)$ الشروط (5)،(3)،(2).

د- تحقق الدالة $G(x,a)$ الشرط (4) الذي لا يحوي العقدة a، وتحقق الشرط الذي ينتج من (4) عند العقدة a بعد استبدال الطرف الأيمن بالعدد 1.

الإثبات: 1- لتكن مثلاً $s=a_4$ ولنثبت أن $\lim_{s\to a_4} G(x,s)=0$ عندئذ من استمرار دالة غرين يكون $G(x,a_4)=0$. لإثبات أن $\lim_{s\to a_4} G(x,s)=0$ يكفي إثبات أن عناصر العمود الأول في (9) تسعى إلى الصفر عندما $s\to a_4$.

$$\lim_{s\to a_4} H(x,s)=\begin{cases}\lim_{s\to a_4}\tilde{G}_4(x,s) & ,x\in\gamma_4\\ 0 & ,x\notin\gamma_4\end{cases} =\begin{cases}\tilde{G}_4(x,a_4+0) & ,x\in\gamma_4\\ 0 & ,x\notin\gamma_4\end{cases}$$

ولما كانت دالة غرين متناظرة $\tilde{G}_4(x,a_4+0)=\tilde{G}_4(a_4+0,x)$، ومن كيفية بناء هذه الدالة يكون $\tilde{G}_4(a_4+0,x)=0$.

وعليه فإن $H(x,a_4+0)=0$.

توجد $\lim\limits_{s\to a_4} l_i(H(x,s))$. عند إثبات المبرهنة 2 بيّنا أن $l_i(H(x,s))=0$ من أجل $i=1,...,15$.

ومن أجل $i=16$، وبالعودة إلى الصيغة (11)، من أجل $x\in\gamma_4$، يكون $l_{16}(H(x,s))=-\left(q_4\widetilde{G}_4'\right)(a_1+0,s)$. وعليه:

$$\lim_{s\to a_4} l_{16}(H(x,s))=-\left(q_4\widetilde{G}_4'\right)(a_1+0,a_4)$$

ولما كان $\widetilde{G}_4(x,a_4+0)\equiv 0$ على γ_4 فإن:

$$\lim_{s\to a_4} l_{16}(H(x,s))=l_{16}(H(x,a_4+0))=0$$

كذلك لدينا

$$l_i(H(x,a_4+0))=0 \quad ;\forall s\in\gamma_4 \quad ,i=17,18$$

وعليه فإن $\lim\limits_{s\to a_4} G(x,s)=0$ مهما تكن $x\in\Gamma$.

2- ليكن مثلاً، $x=a_1$. نحصل على خواص $G(x,a_1+0)$ بالاستفادة من خواص $G(x,s)$ وذلك عندما $s\to a_1$.

ندرس الحالة $s\in\gamma_1$ و $s\to a_1$. لما كانت $\{z_i; i=1,...,18\}$ جملة حلول أساسية للمعادلة المتجانسة (6) يكون $z_i\in J$. عندئذ $\sum\limits_{i=1}^{18} c_i(s)z_i(x)\in J$ وتحقق المعادلة المتجانسة (6) مهما يكن $s\in\Gamma$. لدينا

$$G(x,s)=\begin{cases}\widetilde{G}_1(x,s)+\sum\limits_{i=1}^{18} c_i(s)z_i(x) & ,x\in\gamma_1\\ \sum\limits_{i=1}^{18} c_i(s)z_i(x) & ,x\notin\gamma_1\end{cases}$$

لما كانت $\widetilde{G}_1(x,s)$ دالة غرين للمسألة ثنائية النقطية على الضلع $\gamma_1=(a_1,a_2)$ فإنه مهما تكن $s\in\gamma_1$ يتحقق $\widetilde{G}_1(a_1+0,s)=0$.

من هنا ومن تناظر دالة غرين ينتج أن:

$$\widetilde{G}_1(s,a_1+0)=\widetilde{G}_1(a_1+0,s)=0 \;\; ; \;\; \forall s\in\gamma_1$$

عندئذ مهما تكن $x\in\Gamma$ يكون:

$$\lim_{\substack{s\to a_1\\ s\in\gamma_1}} G(x,s)=\lim_{\substack{s\to a_1\\ s\in\gamma_1}}\sum_{i=1}^{18}c_i(s)z_i(x)=\sum_{i=1}^{18}c_i(a_1+0)z_i(x)$$

من كون $\{z_i;i=1,...,18\}\in J$ ، جملة حلول أساسية للمعادلة المتجانسة (6) فإن $\lim\limits_{\substack{s\to a_1\\ s\in\gamma_1}} G(x,s)\in J$ ، تحقق المعادلة المتجانسة (6)، ومن استمرار الدالة $G(x,s)$ ينتج أن:

$$G(x,a_1)=\lim_{s\to a_1}G(x,s)=\lim_{\substack{s\to a_1\\ s\in\gamma_1}}G(x,s)$$

وهكذا فإن $G(x,a_1)\in J$ وتحقق المعادلة المتجانسة (6) على Γ.

و نتحقق بأسلوب مشابه أنه من أجل $s=a_2$ و $s=a_3$ تكون $G(x,s)\in J$ وتحقق المعادلة المتجانسة (6) على Γ. وهكذا نكون قد تحققنا من صحة أ و ب.

لنثبت صحة ج و د.

ندرس سلوك عناصر العمود الأول من المحدد (9) عندما $s\to a$ و $a\in\partial\Gamma$. لتكن $x\in\gamma_1$ ، من (10) وتناظر $\widetilde{G}_1(x,s)$ والشرط $\widetilde{G}_1(a_1+0,s)=0$ يكون:

$$\lim_{\substack{s\to a_1\\ s\in\gamma_1}} H(x,a_1)=\lim_{s\to a_1}\widetilde{G}_1(x,s)=\widetilde{G}_1(x,a_1+0)=\widetilde{G}_1(a_1+0,x)=0$$

لما كانت الدالة $H(x,s)$ مستمرة بانتظام على $\Gamma\times\Gamma$ ، فإن

$$\lim_{s\to a_1}H(x,s)=0$$

وقد بينّا عند إثبات المبرهنة 2 أن $l_i(H(x,s))=0$ من أجل $i=1,...,15$ و

$$\lim_{\substack{s\to a_1\\ a_0\to\gamma_1}} l_{16}(H(x,s))=\lim_{\substack{s\to a_1\\ a_0\to\gamma_2}} l_{16}(H(x,s))=\lim_{\substack{s\to a_1\\ a_0\to\gamma_3}} l_{16}(H(x,s))=1$$

ومن أجل l_{17} و l_{18} يكون:

$$\lim_{s\to a_1} l_{17}(H(x,s))=\lim_{s\to a_1} l_{18}(H(x,s))=0$$

بالاستفادة من هذه النهايات ومن كون الدالة $G(x,s)$ مستمرة ومن (9) نجد:

$$G(x,a_1)=\lim_{s\to a_1}G(x,s)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & z_1(x) & z_2(x) & \cdots\cdots & z_{18}(x)\\ 0 & l_1(z_1) & l_1(z_2) & \cdots\cdots & l_1(z_{18})\\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ 0 & l_{15}(z_1) & l_{15}(z_2) & \cdots\cdots & l_{15}(z_{18})\\ -1 & l_{16}(z_1) & l_{16}(z_2) & \cdots\cdots & l_{16}(z_{18})\\ 0 & l_{17}(z_1) & l_{17}(z_2) & \cdots\cdots & l_{17}(z_{18})\\ 0 & l_{18}(z_1) & l_{18}(z_2) & \cdots\cdots & l_{18}(z_{18}) \end{vmatrix}$$

ينتج من هنا أن $l_i(G(x,a_1))=0$ عندما $i\neq 16$ و

$$l_{16}(G(x,a_1))=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & l_{16}(z_1) & l_{16}(z_2) & \cdots\cdots & l_{16}(z_{18})\\ 0 & l_1(z_1) & l_1(z_2) & \cdots\cdots & l_1(z_{18})\\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ 0 & l_{15}(z_1) & l_{15}(z_2) & \cdots\cdots & l_{15}(z_{18})\\ -1 & l_{16}(z_1) & l_{16}(z_2) & \cdots\cdots & l_{16}(z_{18})\\ 0 & l_{17}(z_1) & l_{17}(z_2) & \cdots\cdots & l_{17}(z_{18})\\ 0 & l_{18}(z_1) & l_{18}(z_2) & \cdots\cdots & l_{18}(z_{18}) \end{vmatrix}$$

نطرح في هذا المحدد السطر 17 من السطر الأول وننشره بالنسبة إلى السطر الأول فنجد $l_{16}(G(x,a_1))=\frac{1}{\Delta}\times\Delta=1$، وعليه $l_i(G(x,a_1))=0$ عندما $i\neq 16$ و $l_{16}(G(x,a_1))=1$. و عليه، فإن الدالة $G(x,a_1)$ تحقق الخاصتين ج و د.

إن تحقق الخاصتين ج و د من أجل النقطتين $s=a_2$ و $s=a_3$ يتم بأسلوب مماثل. وهو المطلوب.

مبرهنة 5: دالة غرين المستمرة على $\Gamma\times\Gamma$ للمسألة $(5)-(1)$ وحيدة.

الإثبات: لتكن $G_1(x,s)$ و $G_2(x,s)$ دالتي غرين مستمرتين للمسألة $(5)-(1)$. عندئذ:

$$u(x)=\int_\Gamma G_2(x,s)f(s)ds \quad \text{و} \quad u(x)=\int_\Gamma G_1(x,s)f(s)ds \qquad x\neq s$$

حلان للمسألة $(5)-(1)$. نوجد الفرق بين هذين الحلين:

$$\int_\Gamma G_1(x,s)f(s)ds-\int_\Gamma G_2(x,s)f(s)ds=0$$

نثبت نقطة اختيارية $x=x_0$ من Γ، عندئذ أياً تكن $f\in\tilde{C}([\Gamma])$ يكون:

$$\int_\Gamma [G_1(x_0,s)-G_2(x_0,s)]f(s)ds=0$$

لما كان $f(x)\neq 0$ فنجد أن $G_1(x_0,s)-G_2(x_0,s)=0$ تقريباً مهما تكن s. عندئذ من كون الدالة G مستمرة يكون $G_1(x_0,s)-G_2(x_0,s)=0$ أياً تكن $s\in\Gamma$، وعليه، فإن $G_1(x_0,s)=G_2(x_0,s)$ مهما تكن $s\in\Gamma$، ولما كانت x_0 اختيارية من Γ. تكون المبرهنة قد أثبتت.

المراجع

1- BOROVSKIKH A.V. and LAZAREV K.P., 2004 -**Fourth-order differential equations on geometric graphs**. J. Math. Sci., (119)6, 719–739.

2- LAGNESE J. E., LEUGERING G. and Schmidt E. J.P. G., 1993 - **Control of planar networks of Timoshenko beams**. SIAM J. Control Optim., 31, 780–811.

3- LAZAREV K. P. and BELOGLAZOVA T. V., 2006 -**Solvability of the Boundary-Value Problem for a Variable-Order Differential Equation on a Geometric Graph**. Mathematical Notes, (80) 1, 57–64.

4- POKORNYI Yu. V., BELOGLAZOVA T. V., DIKAREVV E. V., and PERLOVSKAYA T. V., 2003- **Green Function for a Locally**

Interacting System of Ordinary Equations of Different Orders. *Mathematical Notes*, (74) 1, 141–143.

5- POKORNYI Yu. V. and BOROVSKIKH A. V., 2004- **Differential equations on networks (Geometric Graphs).** *Journal of Mathematical Sciences*, (119) 6, 691-718.

6- كردي محمد، عبد المجيد معاذ، **العلي الكاطع** صفاء، **وجود ووحدانية حل مسألة قيم حدية من مراتب متنوعة على البيان الهندسي.** المؤتمر الدولي الثالث للرياضيات- جامعة حلب – 2010 /15-16/12.

Some properties of Green Function for the Boundary-Value Problem for a Variable-Order Differential Equation on a Geometric Graph

Abstract

In this paper we study some properties of Green function; especially it's uniformly continuous and its uniqueness for the boundary-value problem for a variable-order differential equation on a geometric graph Γ. This problem expresses the small elastic deformation for the network that consists of 3 beams and 3 strings where this network is supported by springs at the network nodes:

$$(p_i u_i'')'' - (q_i u_i')' = f_i \quad ; \quad i = 1,\dots,6$$

$$u_i(a) - u_j(a) = 0 \quad ; \quad i, j \in I(a)\ ,\ a \in J(\Gamma)$$

$$(p_i u_i'')(a) = 0 \quad ; \quad i \in I(a)\ ,\ a \in J(\Gamma)$$

$$\sum_{i \in I(a)} \left[q_i u_i' - (p_i u_i'')'\right](a+0) - k(a)u(a) = 0 \quad ; \quad a \in J(\Gamma)$$

$$u(b) = 0 \quad ; \quad b \in \partial\Gamma$$

Where a is an internal node of Γ and b is a boundary node of Γ.

This work is a continuation of the previous paper where we proved the existence and uniqueness of the solutions of the studied problem and find its Green function.

Key words: Differential equation, Green function, Geometric graph.