دراسة لعبة connectivity الموضعية على بيانات تامة نتروسوفية

د.هديل سمير برباره[1]، د.رياض خضر الحميدو[2]، مالك محمد الخضير[3]

الملخص

دراسة الألعاب الموضعية، التي تعتمد على تموضع اللاعب، على بيانات نتروسوفية هو أمر جديد وغير معهود، فالبيان النتروسوفي الذي تتم الدراسة عليه يعبر عن حالات نقص المعلومات وتضارب مصالح اللاعبين. في هذه الورقة نحاول تقديم دراسة أولية في هذا الميدان الشيق والذي يعبر عن نمذجة حالات الصراع بين الخير والشر المحض، حيث اعتبرنا أن اللاعب الذي يستطيع بناء شجرة مولدة نتروسوفية أولاً هو من يربح اللعبة، ولا وجود للتعادل هنا، وقدمنا الإثباتات اللازمة لذلك.

الكلمات المفتاحية: بيان نتروسوفي، لعبة موضعية، لعبة connectivity، لعبة Maker-Breaker.

[1] قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية.

[2] قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة الفرات، دير الزور.

[3] طالب دراسات(ماجستير)، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية.

1. المقدمة:

أصبحت بيئة الأعمال اليوم أكثر تعقيداً، حيث تتوقف كثير من نتائج القرارات التي تتخذها المنظمة على ردة فعل المنافسين. على سبيل المثال الأرباح المرتبطة باتخاذ قرار تطوير منتج جديد تتوقف على ردة فعل المنافس تجاه هذا التطوير وهل سيقوم بتطوير منتجاته أم لا. ونظرية المباريات(الألعاب) هي نظرية رياضية تتعامل مع اتخاذ القرار في ظل المواقف التنافسية التي تتميز بوجود تعارض في المصالح بين المنافسين. وتقوم نظرية المباريات بدراسة كيف يتصرف الأفراد في المواقف الاستراتيجية، حيث أن القرارات الاستراتيجية يجب أن تأخذ في الاعتبار رد فعل الآخرين تجاه القرار. [1]

ونظرية الألعاب الموضعية (positional games) هي جزء من نظرية الألعاب، والذي يميز هذا النوع من الألعاب هي طبيعة التنافس الحاصل، فاللعبة الموضعية تضم لاعبَين فقط، أحدهما هدفه الوصول إلى أقصى ربح وأفضل استغلال للموارد المتاحة، والآخر هدفه الوحيد ومنتهى آماله هو منع الأول من تحقيق أي هدف يصبو إليه، فهذا النوع من الألعاب تصف صراع الخير والشر في كل ميدان، فتم تسمية الأول بالباني (Maker)، سواء أكان البناء في مجال الاقتصاد أو العمران أو المجال العسكري وغيره الكثير، فاللعبة الموضعية الواحدة قادرة على نمذجة مواقف متعددة جداً في نموذج رياضي واحد، أما الآخر فأُطلق عليه لقب المفسد أو الهادم(Breaker)، ودراسة هذا النوع من الألعاب يشوبه في كثير من الأحيان نقص في المعلومات كالنوايا التي دفعت الهادم للقيام بأعمال تخريبية محض، وكذلك نقص معلومات الباني حول استراتيجيات الهادم وطريقة تحركه، وكل هذا يندرج ضمن عدم التحديد، ونظراً لأن الألعاب الموضعية يمكن لعبها على بيانات اعتيادية مؤلفة من رؤوس وأضلاع، فالرؤوس ،مثلاً، قد تدل على مجموعة من المدن والأضلاع هي الطرقات، فقد يحاول الهادم تخريب البنية التحتية في المدينة الواحدة أو قطع الطرقات بين عدة مدن، وهذا على سبيل الذكر لا الحصر، فالنوايا التخريبية أكبر من أن تحصى في عالمنا الراهن، وبالتالي فلا تستطيع البيانات الاعتيادية أن تشمل حالة نقص المعلومات لدى الباني، والدراسة تصبح قاصرة عن تحقيق الهدف المرجو منها، من هذا المنطلق قدم سمارنداكة [7] فكرة المجموعة النتروسوفية (neutrosophic set) – واختصاراً (NS) – والتي استطاع من خلالها دراسة الظواهر الطبيعية والمتصفة بالغموض وعدم التحديد التي تتواجد في مسائل الحياة الواقعية. وهذه الفكرة تعتبر امتداداً مباشراً للمجموعة الكلاسيكية والمجموعة الضبابية، والمجموعة الضبابية الحدسية.

وبعد توالي الدراسات في بيئة النتروسوفيك تمت دراسة النتروسوفيك على نظرية البيان الاعتيادية، والتوصل إلى بعد جديد فيها، أطلق عليه نظرية البيان النتروسوفية[12]، والذي يتم من خلالها نمذجة حالات عدم التحديد وتضارب المعلومات والنقص فيها، وجاءت العديد من الدراسات على البيانات النتروسوفية والتي نمذجت كثير من مسائل الحياة الواقعية باستخدام هذا البعد الجديد

[3,4,5,6,8,9,10]، وتمت دراسة بعض الألعاب التعاونية وغير التعاونية في بيئة النتروسوفيك والتي تطبق في ميادين السياسة [13]، ولكننا لم نقف على دراسة قامت بنمذجة نقص المعلومات في الألعاب الموضعية والتي بالإمكان دراستها على بيانات اعتيادية، فارتأينا دراسة الألعاب الموضعية على البيانات النتروسوفية، والتي من شأنها أن تصف وتشمل الكثير من الغموض الذي يشوب سلوكيات الهادم، فقمنا في هذه الورقة بدراسة لعبيتين موضعيتين قياسيتين هما لعبة الاتصال ولعبة الحلقة الهاملتونية (وهما من النماذج القياسية في نظرية الألعاب الموضعية) على بيانات نتروسوفية تامة، ونظراً لعدم وجود دراسات سابقة حيال هذا الموضوع، فإن دراستنا هذه نرجو أن تشعل فتيل البحث في هذا الميدان المليء بالتشويق والإثارة.

على مدار هذا البحث قمنا بتسمية الباني بـ آليس والهادم بـ بوب، وتكون مجموعات الربح في لعبة الاتصال هي بناء شجرة مولدة، أما مجموعات الربح في لعبة الحلقة الهاملتونية فهي بناء حلقة هاملتونية والذي يصل إلى مجموعات الربح أولاً هو الفائز ولا مجال للتعادل.

في هذه الورقة نعالج حالة عدم التحيز (1:1) حيث أياً من اللاعبين يستدعي أضلاعه وفقاً لمسلك، أي أنه عندما يكون اللاعب عند رأس ما وليكن v، فهو يستطيع فقط اختيار الأضلاع الواقعة على v وغير المستدعاة سابقاً من قبل الخصم. مع هذا القيد، نأخذ بالحسبان اللعبة القياسية the connectivity game على أضلاع بيان تام نتروسوفي، حيث n كبيرة بما يكفي. سنبين متى تستطيع آليس بناء شجرة مولدة. ويكون ذلك ممكناً لـ آليس بدون تضييع عدد كبير من الحركات.

1.1 بعض الرموز:

خلال سير هذا البحث سوف نعتمد الرموز التالية:

ليكن G بيان معطى، تشير كل من $V(G)$ و $E(G)$ إلى مجموعتي رؤوس وأضلاع البيان على الترتيب. ليكن الرأسان $x,y \in V(G)$ نرمز للضلع بينهما بـ: $xy \in E(G)$. وليكن $x \in V(G)$ نستخدم الرمز $\deg_G(x)$ للإشارة إلى درجة الرأس x في البيان G. ومن أجل $A \subseteq G$ و $x \in V(G) \setminus A$ نشير بـ $\deg_G(x, A)$ إلى درجة الرأس x بجوار المجموعة A. عند أي نقطة من لعبة بوب – آليس على مجموعة من أضلاع البيان G فإن B و M تشيران إلى البيانات المحدثة من أضلاع بوب وآليس على الترتيب. ونقول عن رأس ما أنه مزار إذا تم استدعاء ضلع مرة واحدة على الأقل ويكون واقع على هذا الرأس، ويقال عنه أنه معزول إذا لم يقع عليه أي ضلع. نستخدم الرمز U للإشارة إلى مجموعة الرؤوس غير المزارة من قبل آليس، أي $U = V(G \setminus M)$. والأضلاع في البيان

$G \setminus (M \cup B)$ تدعى أضلاعاً طليقة. نفترض أن بوب يستهل اللعب، أي حركة من بوب تليها حركة من آليس، وهكذا.

2. أهمية البحث:

للمرة الأولى نطرح في هذه الورقة فكرة دراسة الألعاب الموضعية في حالات عدم التحديد، أي نمذجة صراعات الإعمار والتخريب في اللاتحديد، ويندرج هذا المقال تحت مجال بحوث العمليات ونظرية الألعاب.

3. طرائق ومواد البحث:

1.3 اللعبة الموضعية (positional games)[2] : ليكن $(V, \mathcal{F})$ بيان زائدي منتهي، حيث V هي مجموعة منتهية تدعى لوحة اللعبة، و $\mathcal{F}$ هي عائلة من المجموعات الجزئية من V تدعى مجموعات الربح (winning sets). اللاعبان، الأول والثاني، يتبادلان باستدعاء (بشغل) عناصر(نقاط) غير مستدعاة مسبقاً من اللوحة V. اللاعب الفائز هو الذي يستطيع أولاً الاستيلاء على مجموعة ربح ما $A \in \mathcal{F}$. بخلاف ذلك فاللعبة تنتهي بالتعادل.

2.3 لعبة البانـــي ـ الهادم (Maker - Breaker)[2] : ليكن $(V, \mathcal{F})$ بيان زائدي منتهي، لعبة Maker -Breaker على $(V, \mathcal{F})$ يتم تعريفها على النحو التالي: اللاعبان، يدعى الأول Maker ويدعى الثاني Breaker، يتبادلان باستدعاء عناصر غير مستدعاة مسبقاً من اللوحة V (العناصر هنا تدعى "نقاط")، يهدف Maker إلى شغل مجموعة ربح كاملة $A \in \mathcal{F}$، ويهدف Breaker إلى منع الأول من تحقيق هدفه.

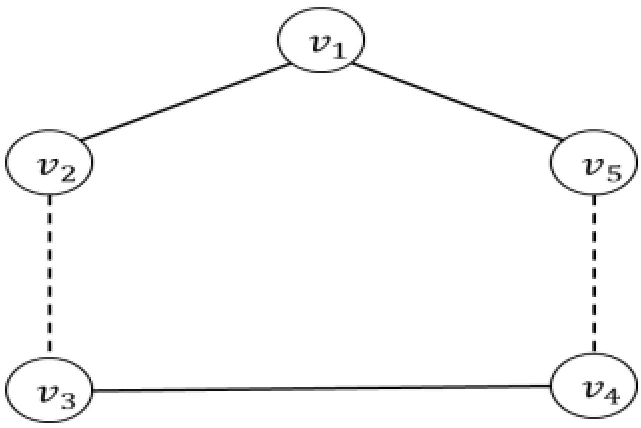
3.3 لعبة Connectivity [2]: هذه اللعبة تعرف على النحو التالي، لاعبان الأول Maker والثاني Breaker يلعبان اللعبة على بيان مضاعف $G = (V, E)$، كل لاعب يأخذ دوره ـ حيث يبدأ Breaker ـ وكل منهما يستدعي في دوره أضلاع غير مستدعاة سابقاً من G. يهدف Maker إلى بناء شجرة مولدة لـ G ويهدف الآخر إلى منع Maker من تحقيق هدفه.

4.3 المجموعة النتروسوفية (Neutrosophic set)[14] : لتكن X فضاء نقطي(objects). المجموعة النتروسوفية A في X يتم تمييزها بثلاثة توابع وهي تابع العضوية الصحيحة $T_A(x)$، وتابع اللاتحديد $I_A(x)$، وتابع العضوية الزائفة (اللاعضوية) $F_A(x)$. والتوابع تأخذ قيمتها ضمن الفترة $]0^-, 1^+[$، أي أن، $T_A(x): X \to]0^-, 1^+[$ و $I_A(x): X \to]0^-, 1^+[$ و $F_A(X): X \to]0^-, 1^+[$، $0^- \leq T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \leq 3^+$. في تطبيقات الحياة الواقعية كما في المسائل الهندسية، من الصعب تطبيق المجموعة النتروسوفية عندما تأخذ قيمها في الفترة الغير قياسية

$]0^-,1^+[$ لذا سيتم اعتبار أن المجموعة النتروسوفية تأخذ قيمها في الفترة $[0,1]$(مجموعة نتروسوفية وحيدة القيمة).

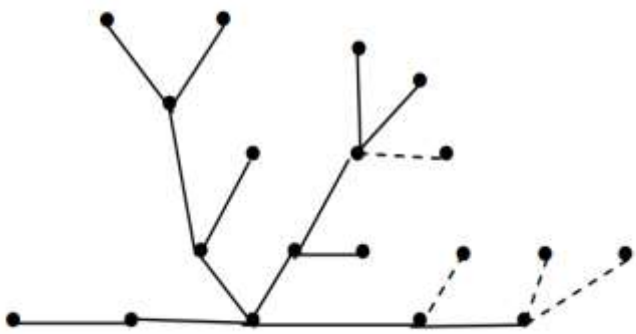
5.3 البيان النتروسوفي Neutrosophic graph [12]: لتكن $V(G)$ مجموعة الرؤوس لبيان معطى G، إذا احتوت مجموعة أضلاع البيان G على الأقل ضلع واحد يعبر عن علاقة غير محددة تماماً بين رأسين، قلنا إن هذا البيان هو بيان نتروسوفي.

6.3 مثال على البيان النتروسوفي[2] :



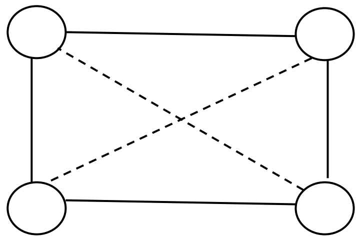
الشكل 1.3(بيان يضم ضلعين نتروسوفيين v_2v_3, v_4v_5)

7.3 مبرهنة (الشجرة النتروسوفية)[12] : البيان النتروسوفي المترابط بـ n رأس يكون شجرة نتروسوفية إذا وفقط إذا امتلك $n-1$ ضلع واحد على الأقل منها يكون ضلع نتروسوفي والأضلاع المتبقية تكون أضلاع عادية. كما في الشكل التالي:



الشكل 2.3

8.3 البيان النتروسوفي التام (complete Neutrosophic graph): يقال عن بيان ما أنه تام إذا وجد ضلع بين كل رأسين مختلفين فيه، ويحتوي على ضلع نتروسوفي واحد على الأقل، ونرمز له بـ $E(\widehat{K}_n)$، حيث n هو عدد الرؤوس. (الخطوط المتقطعة تدل على الأضلاع النتروسوفية).



الشكل 3.3 (بيان نتروسوفي تام)

4. النتائج والمناقشات:

مبرهنة 1.4: في لعبة الترابط (Connectivity) لـ: بوب – آليس غير المتحيزة على أضلاع بيان نتروسوفي تام $E(\widehat{K}_n)$، فإن آليس لديها استراتيجية رابحة في $n+1$ حركة على الأكثر.

مبرهنة 2.4: في لعبة الترابط لـ: بوب – آليس غير المتحيزة على أضلاع بيان نتروسوفي تام $E(\widehat{K}_n)$، فإن بوب لديه استراتيجية لتأخير ربح آليس بـ n حركة على الأقل.

1.4 الاستراتيجية $\widehat{S}$:

بداية نعرف الاستراتيجية $\hat{S}$ التي سوف تستخدمها آليس في اللعبة بغية الفوز.

الاستراتيجية $\widehat{S}$: من أجل حركتها الأولى، تختار آليس الرأس v_1، حيث أن بوب قد أنهى حركته الأولى، وتستدعي ضلعاً **نتروسوفياً** v_1u (حيث نفرض أن البيان يحوي ثلاثة أضلاع نتروسوفية على الأقل) بحيث أنَّ: $\deg_B(u)=0$، وفي أي دورة أخرى تختبر آليس وجود ضلع $e\in E(B)$، $e=pq$، بشرط $p,q\in U$، ومن موضعها الحالي، وليكن w، تستدعي آليس الضلع wp أو wq على حسبِ أيّاً منهما يكون طليقاً. أما إذا كان كل من الضلعين wp و wq طليقاً، فإنها تختار wp إذا كان $\deg_B(p)>\deg_B(q)$، وتختار wq إذا كان $\deg_B(q)>\deg_B(p)$. أما إذا لم يوجد ضلع كهذا، فإن آليس من موضعها الحالي تختار ضلعاً طليقاً wu بحيث يكون:

$$u\in U \ and\ \deg_B(u)=\max\{\deg_B(v):v\in U\}$$

وذلك طالما أن $|U| \geq 3$. وأما إذا كانت كل الأضلاع wu تحقق أنّ: $\deg_B(u) = 0 \ \forall u \in U$ فإن آليس تستدعي ضلعاً طليقاً كيفياً.

وينتج عن اتخاذ آليس لهذه الاستراتيجية عدة تعابير بالإمكان إثباتها واستخدامها في إثبات المبرهنتين الأولى والثانية.

توطئة 1.1.4: في لعبة بوب ـ آليس (1:1) على $E(\widehat{K}_n)$، الاستراتيجية $\hat{S}$ تضمن لآليس، طالما أن $U > 2$، بعد كل دورة كل ضلع لـ بوب يقع على رأس ما $v \in V(M)$.

الإثبات: بالاستقراء الرياضي على عدد الدورات k.

من المعلوم في الدورة الأولى أن آليس تختار الرأس v_1 وذلك من أجل حركتها الابتدائية، حيث أن بوب قد أنهى حركته الأولى، وتستدعي الضلع v_1u حيث: $\deg_B(u) = 0$ و $u \in U$. وبالتالي التقرير صحيح بعد الدورة الأولى. ولنفرض أنّ التقرير محقق بعد $k \geq 2$ دورة. وبفرض أنه في الدورة $k+1$ يقوم بوب باستدعاء الضلع b_1b_2 حيث $b_1, b_2 \notin V(M)$. نرمز لموضع آليس الحالي بـ w ولنعتبر أن آليس غير قادرة على زيارة الرأس b_1 أو الرأس b_2 في الدورة $k+1$. مما ينتج أنَّ $wb_1, wb_2 \in E(B)$. ولنفرض أن بوب قد استدعى هذه الأضلاع على النحو: b_1w, wb_2, b_2b_1. وهذا بدوره يعني أنه في الدورة التي يستدعي فيها بوب الضلع b_1w فإن آليس ستتحرك إلى رأس ما مختلف عن b_1 و w، وبعد هذه الدورة يكون b_1w يكون ضلعاً لـ بوب وغير واقع على $V(M)$ وهذا يتناقض مع فرضية الاستقراء. ■

توطئة 2.1.4: في لعبة بوب ـ آليس (1:1) على $E(\widehat{K}_n)$، الاستراتيجية $\hat{S}$ تضمن لآليس، طالما أن $U > 2$، أنه بعد كل دورة يمكن أن يكون هناك على الأكثر رأسان من U تنتمي إلى $V(B)$.

الإثبات: بالاستقراء الرياضي على عدد الدورات k.

يوجد رأس واحد فقط بعد الدورة الأولى مزار من U من قبل بوب، وهو الرأس الذي اختاره بوب لموضعه الابتدائي. وبفرض أنه بعد k دورة، $k > 1$، كان هناك رأسين على الأكثر مزاران من بوب. وليكن بوب قد أنهى حركته في الدورة $k+1$ وحان دورة آليس لتلعب حركتها في هذه الدورة. إذا كان هناك ثلاثة رؤوس من U تمت زيارتها من بوب فإنه وبحسب فرضية الاستقراء أحد هذه الرؤوس قد مر عليه في الدورة الأخيرة $(k+1)$. نرمز لهذه الرؤوس الثلاثة بـ: u_1, u_2, u_3 وليكن u_3 الرأس الذي زاره بوب في حركته الأخيرة. إذا كانت آليس غير قادرة على استدعاء أياً من الأضلاع wu_1, wu_2, wu_3 من موضعها الحالي w، فهذا يعني أن بوب قد أنهى حركته ذات الرقم k عند الرأس w وبعد الدورة k أصبح لدينا $wu_1, wu_2 \in E(B)$. لأجل هذا، احتاج بوب لثلاث حركات، وهذا يدل على أنه في

الدورة $k-2$ استدعى بوب أحد الضلعين wu_1 أو wu_2. لكن بما أن آليس زارت الرأس w في الدورة k، فبالتالي نصل إلى تناقض مع التوطئة 2.1.4 بعد الدورة $k-2$، وبعد الدورة $k-1$ نحصل على تناقض أيضاً مع فرضية الاستقراء وذلك لأنه يوجد ثلاثة رؤوس من U تم زيارتها من بوب. ■

نتيجة 3.1.4: في لعبة بوب ـ آليس (1:1) على $E(\widehat{K}_n)$، الاستراتيجية $\hat{S}$ تضمن لآليس، طالما أن $U>2$، أن تتوضع بعد كل دورة عند رأس ما w بحيث أن: $\deg_B(w,U)\leq 1$.

الإثبات: هذا الكلام محقق فعلاً بعد الدورة الأولى. وبفرض أنه بعد دورة ما ولتكن i، $i>1$، توضعت آليس عند الرأس w حيث $\deg_B(w,U)=2$، أي أن الضلعين $wu,wu'\in E(B)$، حيث $u,u'\in U$، وأن بوب استدعى الضلع wu قبل الضلع wu'. ولنعتبر أنه قد حان ثانيةً دور بوب واستدعى ضلعاً ما يقع على $u'\in U$ في الدورة $i+1$. وهذا يناقض التوطئة 2.1.4، لأنه عندما استدعى بوب الضلع wu في الدورة $i-1$ فإن آليس تزور رأس ما مختلف عن w وعن u، وبعد انتهاء هذه الدورة، يكون الضلع wu من أضلاع بوب وغير واقع على $V(M)$. وعليه نجد أن الرأس الذي تتوضع عنده آليس بعد انتهاء كل دورة يملك الدرجة $\deg_B(w,U)\leq 1$.

نتيجة 4.1.4: في لعبة بوب ـ آليس (1:1) على $E(\widehat{K}_n)$، الاستراتيجية $\hat{S}$ تضمن لآليس، طالما أن $U\geq 2$، بعد حركة بوب وقبل حركة آليس في دورة ما $i\geq 2$، فإن الرأس w والذي أنهت آليس حركتها السابقة عنده يمكن أن تكون درجته $\deg_B(w,U)\leq 2$. إذا كان $\deg_B(w,U)=2$ فهذا يعني أن بوب قد أنهى حركته في الدورة $i-1$ عند الرأس w.

نتيجة 5.1.4: في لعبة بوب ـ آليس (1:1) على $E(\widehat{K}_n)$، تستطيع آليس باللعب وفق الاستراتيجية المعتمدة أن تبني مساراً من الطول $n-3$(بـ $n-2$ رأس) في $n-3$ دورة.

الإثبات: بفرض أن آليس قد بنت مساراً P من الطول $n-4$ بـ $n-3$ رأساً. لتكن $U=\{u_1,u_2,u_3\}$، وليكن w هو موضع آليس الحالي. إذا كان $wu_i\in E(B)\ \forall i\in\{1,2,3\}$ وهذا يعني أنه بعد حركة بوب في هذه الدورة يكون لدينا $\deg_B(w,U)=3$ وهذا يتناقض مع النتيجة 4.1.4. ■

2.4 إثبات المبرهنة 1.4:

في بداية اللعبة تكون كل الرؤوس معزولة في بيان آليس و $U=V(\widehat{K}_n)$.

المرحلة الأولى: نبني، في هذه المرحلة، مساراً P من الطول $n-4$ في $n-4$ دورة، وذلك باللعب وفق الاستراتيجية المعتمدة، وهذا ممكن وفقاً للازمة 5.1.4.

المرحلة الثانية: خلال سير هذه المرحلة تزور آليس الرؤوس المتبقية في 5 حركات إضافية على الأكثر. وفي بداية هذه المرحلة نفرض أن آليس متوضعة عند الرأس w وأنَّ: $U = \{u_1, u_2, u_3\}$. وبفرض أنه قد حان دور آليس لتقوم بحركتها في الدورة $n-3$. والنتيجة 4.1.4 تشير إلى أن $\deg_B(w, U) \le 2$.

بداية نفرض أن الرأس w يكون بحيث $\deg_B(w, U) \le 1$. وليكـــن $wu_1 \in E(B)$، بما أن آليس زارت w في الدورة $n-4$ مما يعني أن بوب قد استدعى الضلع wu_1 في هذه الدورة. بخلاف ذلك، إذا قام بوب باستدعاء هذا الضلع قبل الدورة $n-4$ فإننا سنصل إلى تناقض مع التوطئة 1.1.4 قبل الدورة $n-4$. إذا أنهى بوب حركته في الدورة $n-4$ عند الرأس u_1، وعليه يكون بمقدور بوب استدعاء u_1u_i، حيث $i \in \{2,3\}$، في حركته ذات الرقم $n-3$. بفرض أنَّ $u_1u_2 \in E(B)$ وأن آليس عند الرأس u_2. ومن الملاحظ أن هذا الضلع لم يكن بمقدور بوب استدعائه قبل هذه الحركة لأننا سنصل إلى تناقض مع التوطئة 1.1.4. وكذلك الأمر بالنسبة للأضـــــلاع $u_2u_3, u_1u_3 \notin E(B)$. تستدعي آليس في الدورة $n-3$ الضلع wu_3 وفي الدورة التي تليها ستتحرك إلى الرأس u_1. ولا يستطيع بوب منعها من استدعاء الضلع u_3u_1 لأنه أنهى حركته ذات الرقم $n-3$ عند الرأس u_2.

في الدورة $n-3$، عندما زارت آليس الرأس u_3 للمرة الأولى فإننا نحصل على $\deg_B(u_3) \le 6$. وبما أن الرأسين u_1, u_2 كانت لا تزال غير مزارة من آليس في الدورة $n-3$، نجد أنَّ $\deg_B(u_1), \deg_B(u_2) \le 8$ فـي الـدورة $n-1$. وبما أن:

$$\deg_B\big(u_1,\ V(P)\big) + \deg_B\big(u_2,\ V(P)\big) < v(P)$$

فإنه يوجد رأس $v \in V(P)$ بحيث أن الضلعين u_1v و vu_2 تكون طليقة. وتقوم آليس باستدعاء u_1v في الدورة $n-1$. وإذا كانت آليس غير قادرة على استدعاء الضلع vu_2 في الدورة n فهذا يعني أن بوب قد أنهى حركته في الدورة السابقة عند الرأس u_2، لذا فإن بوب غير قادر على منع آليس من زيارة الرأس u_2 باستدعاء الضلع u_2v في الدورة ذات الدليل n. وبالتالي فإن آليس تتحرك إلى رأس ما وليكن $v' \in V(P)$ بحيث أن الضلعين vv' و $v'u$ يكونان طليقين. ونريد أن نثبت وجود مثل هذا الرأس، أي v'.

ليكن $P' = P \setminus \{v, u_1\}$. بما أن $\deg_B(u_2) \le 6$ في الدورة $n-3$، وبالتالي لدينا $\deg_B(u_2) \le 8$ قبل حركة آليس في الدورة n. لذا، إذا كان:

$$\deg_B\big(v, V(P')\big) + \deg_B\big(u_2, V(P')\big) \ge v(P') = n - 3$$

فإنه ينتج أن: $\deg_B(v, V(P')) \geq n - 11$. ولايجاد درجة كبيرة مثل هذه عند الرأس v، فإن بوب يحتاج على الأقل $2(n-11) - 2$ حركة وذلك لأن بوب أيضاً مفروض عليه شرط التحرك وفقاً لمسلك. ونظراً لأن بوب لعب n حركة تماماً فإن ذلك غير ممكن، ولذلك في الدورة n تستدعي آليس الضلع vv' وفي الدورة الأخيرة $n+1$ تتحرك إلى u_2. وبالتالي لا يستطيع بوب منع آليس من استدعاء $v'u_2$ وذلك لأنه أنهى حركته في الدورة n عند الرأس v.

ليكن $\deg_B(w, U) = 2$ قبل حركة آليس في الدورة $n - 1$ وليكن $wu_1, wu_2 \in E(B)$. من النتيجة 3.1.4 نعلم أن بوب قد تحرك إلى u_1 أو u_2 من w في حركته الأخيرة، وذلك لأن في نهاية الدورة $n - 4$ عندما آليس تأتي إلى w، ولدينا $\deg_B(w, U) \leq 1$. وبفرض أن بوب يكون عند الرأس u_2، الأضلاع $u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3 \notin E(B)$. بخلاف ذلك، فإن هذا سيعني أن بوب استدعى ضلعاً ما من هذه الأضلاع في دورة ما قبل الدورة $n - 3$ وبالتالي سنحصل على تناقض وفقاً للتوطئة 1.1.4.

تستدعي آليس الضلع wu_3 في الدورة $n - 3$. وفي الدورة التالية إذا تحركت آليس إلى u_3 فإنها تستدعي الضلع u_3u_1 ومن ثم u_1u_2 في الدورة $n - 1$. بوب غير قادر على منع آليس من استدعاء الضلع u_1u_2 لأنه أنهى حركته في الدورة $n - 2$ عند الرأس u_3. وإذا تحرك بوب إلى الرأس u_1 في الدورة $n - 2$، فأن آليس تستدعي الضلع u_3u_2. وفي الدورة $n - 1$ تعين آليس رأساً $v \in V(B)$ بحيث أن الأضلاع u_2v و vu_1 تكون طليقة. بطريقة مماثلة لما سبق يمكن إثبات وجود رأس مثل v. وبما أنه يجب على بوب التحرك إلى u_1 في الدورة $n - 1$، وبالتالي فهو غير قادر على منع آليس من استدعاء الضلع vu_1 في الدورة الأخيرة n. وبخلاف ذلك، تستطيع آليس زيارة الرأسين المتبقيين في حركتين. ■

3.4 إثبات المبرهنة 2.4:

نفرض هنا أن آليس تبدأ اللعبة ويكون $U = V(\widehat{K}_n)$.

يلعب بوب بشكل كيفي لغاية $|U| = 3$. ولأجل إمكانية زيارة $n - 3$ رأس، فتحتاج آليس أن تلعب $n - 4$ حركة على الأقل. وليكن $u_1, u_2, u_3 \in U$ بعد الدورة $k \geq n - 4$.

في الدورة $k + 1 \geq n - 3$ تتحرك آليس إلى رأس ما $u_i, i \in \{1,2,3\}$. يتحرك بوب إلى الرأس $u_j, j \neq i$. يكون بوب قادر على التحرك إلى u_j بما أنه $u_j \in U$ ولا يوجد ضلع لـ آليس بين موضع بوب الحالي والرأس u_j.

وبدون تقليل من العمومية، بفرض أن آليس قد تحركت إلى u_1 وبوب قد تحرك إلى u_2. إذا تحركت آليس في الدورة $k+2$ إلى واحد من $\{u_2,u_3\}$، فسوف يستدعي بوب الضلع u_2u_3. وكون $u_2u_3 \in E(B)$ من موضع آليس الحالي، فإنها غير قادرة على زيارة الرأس المعزول المتبقي في بيانها في الدورة $k+3 \geq n-1$، لذا فهي تحتاج إلى صناعة حركة إضافية واحدة على الأقل لزيارة الرأس المتبقي. وإذا تحركت آليس إلى رأس ما $v \neq u_i, i \in \{2,3\}$ في الدورة $k+2 \geq n-2$، فإنها تحتاج على الأقل إلى أكثر من حركتين لزيارة u_2,u_3. وهذا ينتج أن آليس تحتاج على الأقل n حركة للفوز في لعبة الاتصال.■

المناقشات والتوصيات:

استعرضنا في هذه الورقة دراسة لحالات الصراع بين بوب وآليس، فالأول، بوب، لديه هدف وحيد وواضح في منع اللاعب الثاني وهي، آليس، من تحقيق أي هدف يحاول الوصول إليه، وبالتالي هذا الوضع يمثل هجوم الأول علي الثاني، فآليس هنا في حالة دفاعية وليست هجومية، ومجال اللعب هنا هو بيان تام، وهذه الصراع يندرج في ضوء أن كل من اللاعبين يعرف تحركات الآخر، ولكن في الواقع لا يكون كذلك، وخصوصاً في الصراعات العسكرية، فالدول المحتلة تهجم على الدول الضعيفة بغية نهب خيراتها، فالوضع هنا يشير إلى طرف مهاجم وطرف يدافع عن أرضه، ولكن عندما نرى أن دولة ثالثة تساعد الدولة المحتلة في مشروعها الاستيطاني فهذه حالة عدم تحديد ولا نستطيع التعبير عنها بضلع بيان عادي فنحن هنا نحتاج إلى ضلع نتروسوفي يمثل هذه الحالة، وغير ذلك الكثير من الحالات التي لا تستطيع نظرية البيان الكلاسيكية أن تعبر عنها بدقة، ومن هنا جاءت الحاجة إلى دراسة اللعبة الموضعية على بيانات نتروسوفية، ونحاول في الأعمال المستقبلية دراسة أعمق للهياكل البيانية النتروسوفية ومعالجة الألعاب الموضعية عليها، كأن ندرس لعبة Hamiltonian cycle على بيانات نتروسوفية وغيرها الكثير.

المراجع:

[1] Al-Bolk W. (2016) " Using quantitative methods to solve administrative problems." Faculty of Commerce, University of Cairo.

[2] Beck J. (2008), Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 114, Cambridge University Press.

[3] Broumi S, Bakali A, Talea M, Smarandache F, Dey A, Hang Son L. (2018) "Spanning Tree Problem with Neutrosophic Edge Weights." Procedia Computer Science 127: pp.190–199.

[4] Wang H, Smarandache F, Zhang Y and Sunderraman R. (2010) " Single valued neutrosophic sets." Multisspace and Multistructure 4:410-413.

[5] Şahin R. "Multi-criteria neutrosophic decision making method based on score and accuracy functions under neutrosophic environment."pp.1-9. arXiv:1412.5202.

[6] Mullai M, Broumi S, Stephen A. (2017) "Shortest path problem by minimal spanning tree algorithm using bipolar neutrosophic numbers." International Journal of Mathematic Trends and Technology 46(2):80-87.

[7] Smarandache F. (1998) " Neutrosophy, Neutrosophic Probability, Set, and Logic." ProQuest Information & Learning, Ann Arbor, Michigan, USA, 105p.

[8] Kandasamy I. (2016) "Double-Valued Neutrosophic Sets, their Minimum Spanning Trees, and clustering algorithm." Journal of Intelligent system pp.1-17.

[9] Broumi S, Bakali A, Talea M, Smarandache F, and Vladareanu L. (2016) "Applying Dijkstra Algorithm for Solving Neutrosophic Shortest Path Problem." Proceedings of the 2016 International Conference on Advanced Mechatronic Systems, Melbourne, Australia, November 30 - December 3, 412-416.

[10] Broumi S, Smarandache F, Talea M, and Bakali A. (2016) "An introduction to bipolar single valued neutrosophic graph theory." Applied Mechanics and Materials 841:184-191.

[12] Kandasamy, Vasantha, K. Ilanthenral, and Florentin Smarandache (2015). "Neutrosophic graphs: a new dimension to graph theory" Infinite Study.

[13] Portilla, S.R., M.Á. Tapia, and D.C. Flores, Neutrosophic games applied for the conflict of three South-American countries against the International

Centre for Settlement of Investment Disputes (ICSID) (Juegoes neutrosóficos como herramienta para la modelación de solucion a conflictos internacionales concernientes a inversions (CIADI)(In Spanish). Incestigación Operacional, 2020. 41(5): p. 647-654.

[14] Smarandane, F. (2010). Neutrosophic set, a generalization of the Intuitionistic Fuzzy Sets. International Journal of Applied Mathematics, 24, 289-297.

study of the connectivity game on complete neutrosophic graph

Abstract: Studying positional games, which depend on the player's position, on neutrosophic graph is something new and unusual. The neutrosophic graph that is being studied expresses cases of lack of information and conflicts of interest of the players. In this paper, we attempt to spark scientific research in this interesting field, which expresses modeling situations of conflict between true and false. We considered that the player who can build the neutrosophic tree first wins the game, and there is no tie here, and we provided the necessary proofs for that.

Keywords: neutrosophic graph, positional games, connectivity game, Maker-Breaker game.