# تطوير المعادلة النصف تجريبية للكتلة بإضافة حد أيزوسبيني

**نورس غازي الهلامي**

مدرس في كلية العلوم، جامعة الفرات، دير الزور ، الجمهورية العربية السورية

E-mail: nawrasalhoulami@alfuratuniv.edu.sy

**الملخص:**

قُمنا بإيجاد مجموعة جديدة من معاملات العلاقة نصف التجريبيّة للكتلة وهي $a_V, a_S, a_C, a_{AS}$ من أجل النوى التي تمتلك عدد كتلي فردي وذلك باستخدام طريقةِ التربيعات الصغرى، كما قمنا بإضافة حد آخر للعلاقة نصف التجريبية للكتلة يتعلّق الأيزوسبين $a_T$ مستعينين بنموذج الجسيم المفرد.

وعندَ حساب الانحراف المعياري بين قيم طاقات الترابط للنوى المحَسوبة لدينا والقيم التجريبية قبل وبعد أضافة الحد الأيزوسبيني، وجدنا بأنَّ أضافة الحد الأيزوسبيني للعلاقة النصف تجريبية للكتلة يخفض قيمة الانحراف المعياري.

وعندَ مقارنة قيم طاقات الترابط للنوى المدروسة مع قيم دراسات سابقة وجدنا بأنَّ القيم المَحسوبة لدينا أفضل من القيم المَحسوبة في هذهِ الدراسات.

**الكلمات المفتاحية:** العلاقة نصف التجريبيّة للكتلة، طاقة الترابط، الأيزوسبين، طريقة التربيعات الصغرى.

## 1. مقدمة: Introduction

يُعتبر نموذج قطرة السائل من أوائل النماذج النووية وأهمها، حيثُ يَفترض بأنَّ النواة تمتلك خصائص مشابهة لخصائص قطرة السائل، ويتمُّ بواسطة هذا النموذج حساب طاقات الترابط بتابعية العدد الكتلي والعدد الذري عن طريق العلاقة النصف التجريبية للكتلة Semi-Empirical Mass Formula (SEMF) والتي تعرف بعلاقة بيث – وايزكر Bethe–Weizsäcke(Leipzig, 1935). ووفقاً لهذهِ العلاقة فإنَّ طاقة الترابط النووية تكون عبارة عن مجموعةٍ من الحدود كل حدٍ منها يُعبّر عن خاصةٍ مميزةٍ من خصائص النواة.

تتكوَّن هذهِ المعادلة من خمسة حدود أساسيّة هي حد الطاقة الحجمية وحد الطاقة السطحية وحد الطاقة الكولونية وحد الطاقة اللاتماثلية وحد طاقة التزاوج.

عادةً ما يتمُّ حساب قيم المعاملات في المعادلة النصف تجريبية للكتلة وهي $a_V, a_S, a_C, a_{AS}, a_p$ عن طريق التناسب مع البيانات التجريبية بطريقة التربيعات الصغرى Least Square Method، والتي تُعتبر من الطرق الفعَّالة من أجل حسابات من هذا النوع( WELLS, P. V., 2005).

هدفَ هذا العمل لاستخدام طريقة التربيعات الصغرى لإيجاد مجموعةٍ جديدةٍ من معاملات المعادلة نصف التجريبية للكتلة وذلك من أجل مئة نواة مستقرة فردية أي تمتلك عدد كتلي فردي (النوى فردية – زوجية والنوى الزوجية – فردية) مستعينين بكود تمَّ تصميمه لهذا الغرض عن طريق البرنامج الشهير MATLAB كما تمَّ اختبار أضافة حد آخر يتعلَّق بالأيزوسبين مُستعينين بنموذج الجسيم المفرد، وذلك عن طريق مقارنة قيمة الانحراف المعياري Standard deviation بين قيم طاقات الترابط للنوى المحَسوبة لدينا والقيم التجريبية قبل وبعد أضافة الحد الأيزوسبيني.

## 2. طاقة الترابط النووية: Nuclear Binding Energy

يُسمى مجموع عدد البروتونات $Z$ (وهو يساوي العدد الذري للعنصر في الجدول الدوري) وعدد النيترونات ضمن النواة بالعدد الكتلي $A$ ويكون $A = Z + N$ .

ترتبط البروتونات والنيترونات مع بعضها البعض داخل النواة بواسطة قوى تجاذبيه كبيرة جداً وقصيرة المدى تُسمى بالقوى النووية، وتختلف هذهِ القوى عن بقية القوى المعروفة في الطبيعة مثل القوى الكهربائية وقوى الثقالة. ونتيجةً لوجد هذهِ القوى الكبيرة والقصيرة المدى نَعتبر بأنَّ النواة جملة مُقيدة، لذا نحتاج لطاقة قدرها عدة ملايين من الإلكترون فولط (من مرتبة الميغا إلكترون فولطMeV) لفصل مكونات النواة،(Norman D., C.,2005) ، مقارنةً بعدة إلكترون فولط لفصل الإلكترونات عن مداراتها الذرية (نحتاج طاقة قدرها 13.6 eV لفصل إلكترون ذرة الهيدروجين عن مداره). تُسمى أقل كمية من الطاقة التي نحتاجها لفصل مكونات النواة ل $Z$ بروتون و $N$ نيترون بطاقة الترابط، وهذهِ الطاقة تساوي الطاقة اللازمة لتشكيل نواة ما مكونة من $Z$ بروتون و $N$ نيترون منفصلة عن بعضها البعض(Norman D., C.,2005) . وبالتالي تكون كتلة النواة أقل من مجموع كتل مكوناتها من بروتونات ونيترونات، ولذا يُمكن أن نكتب كتلة النواة بالشكل التالي:

$$\Delta M = ZM_H + NM_n - M(A,Z) \qquad (1)$$

حيث $M_H$ كتلة ذرة الهيدروجين والتي تساوي $1.007940\text{u}$ و $M_n$ كتلة النيترون والتي تساوي $1.008665\text{u}$ و $M(A,Z)$ كتلة الذرة، وبالتالي تكون طاقة الترابط للنواة كما يلي:

$$E_B = \left[ZM_H + NM_n - M(A,Z)\right]c^2 \qquad (2)$$

حيث $c^2 = 931.494061 MeV/u$ مربع سرعة الضوء في الخلاء.

### 3. نموذج قطرة السائل:Liquid Drop Model

يُعتبر نموذج قطرة السائل واحداً من أهم النماذج النووية، أُقترح هذا النموذج من قبل العالم وايزكر Weizacker عام 1935 ووضع بور Bohr عام 1937 الفرضيات الأساسية لهذا النموذج والذي يُعتبر من أوائل النماذج النوويّة(Leipzig, 1935)، وفيه تمَّ تشبيه النواة بقطرة السائل، وتمَّ اختيار هذا التشبيه وفقاً للاعتبارات الثلاثة التالية

:( Nigam B.P., 1967):

–المادة النوويّة غير قابلة للانضغاط، لذلك فإنَّ:

$$\left.\begin{aligned} V &\alpha R^3 \\ R &\alpha A^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} V \alpha A \qquad (3)$$

حيث $R$ نصف قطر النواة و $A$ عدد نيوكليوناتها، أي أنَّ حجم النواة يتناسب مع عدد نيوكليوناتها، كما هو الحال في قطرة السائل.

– الثبات التقريبي لطاقة الترابط النوعيّة للنوى المتوسطة والثقيلة، وهذا يدلُ على أنَّ كل نيوكليون يتبادل التأثير مع عدد محدود من النيوكليونات، أي أنَّ القوى النووية مُشبعة شأنها في ذلك شأن القوى المؤثرة بين جزيئات السائل.

– القوى النوويّة مُتماثلة، فهي لا تتعلق بكون النيوكليون بروتون أو نيوترون كما هو الحال في جزيئات قطرة السائل.

### 4. العلاقة نصف التجريبيّة للكتلة: Semi-Empirical Mass Formula

وضعت هذهِ المعادلة عام 1935 من قبل العالم C.F Von Weizacker اعتماداً على تشابه النواة مع نموذج قطرة السائل كما ذكرنا سابقاً، وتُعرف هذهِ المعادلة أيضاً

بمعادلة بيث – وايزكر Bethe– Weizacker(Leipzig, 1935). وتقوم على اعتبار أنَّ طاقة الترابط الكلّية للنواة هي عبارة عن مجموعةٍ من الحدود، يُعبِّر كل منها عن خاصة من الخواص المميّزة للنواة، كما يلي:

$$EB = \sum_{i=1}^{n} E_i \qquad (4)$$

تُعطى حدود المعادلة السابقة على الشكل التالي (Nigam B.P. ,1967 ):

– الحد الأوَّل يُسمى حد الطاقة الحجمية، وقد سمي بهذا الاسم لأنَّ حجم النواة يتناسب مع عدد نيوكليوناتها $A$ وقد أُعتمد في تفسير هذا الحد على وجود طاقة ترابط وسطيّة مُحددة لكل نيوكليون من أجل جميع النوى، ويكتب هذا الحد كما يلي:

$$E_V = a_V A \qquad (5)$$

حيثُ $E_V$ هي حد الطاقة الحجمية و $a_V$ معامل التناسب الحجمي.

– الحد الثاني يُسمى بحد الطاقة السطحيّة، استنتج هذا الحد اعتماداً على ظاهرة التوتر السطحي في السوائل، ففي قطرة السائل تكون الجزيئات الموجودة على سطح القطرة أضعف ارتباطاً من الجزيئات داخلها، وبالتالي فإنَّ طاقتها تكون أكبر، والشيء ذاته مُحقق في النواة، حيثُ تكون النيوكليونات الواقعة على السطح أضعف ارتباطاً من النيوكليونات الواقعة في عمق النواة، وبالتالي فهي تمتلك طاقة سطحيّة إضافية، وذلك لأنّ النيوكليون الداخلي يتبادل التأثير مع عدد أكبر من النيوكليونات منه في حالة النيوكليون الخارجي الموجود على سطح النواة، ويكتب هذا الحد كما يلي:

$$E_S = -a_S A^{2/3} \qquad (6)$$

حيثُ $E_S$ حد الطاقة السطحية و $a_S$ معامل التناسب السطحي، ويُضاف هذا الحد بإشارة سالبة إلى معادلة طاقة الترابط لأنَّه ينقص من قيمة طاقة الترابط.

– الحد الثالث هو حد الطاقة الكولونيّة، حيثُ أنَّ وجود قوى التدافع الكولوني بين البروتونات يؤدي إلى إنقاص قيمة طاقة الترابط، فإذا اعتبرنا أنَّ كل بروتون يتبادل التأثير مع بروتون آخر فإنَّ طاقة التأثير المُتبادل تتناسب مع $Z(Z-1)$ وفي الحالة التي يكون فيها $Z >> 1$ يُمكن تقريب القيمة إلى $Z^2$، وبما أنَّ الكمون الكولوني متناسب مع $\frac{1}{r}$ فإنَّ عبارة الطاقة الكولونية تكتب كما يلي:

$$E_C = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \tag{7}$$

حيثُ $E_C$ هي الطاقة الكولونية و $a_C$ معامل التناسب الكولوني.

إنَّ هذا الحد يضاف أيضاً بإشارة سالبة إلى معادلة طاقة الترابط، وذلك لأنَّ طاقة التنافر الكولوني تنقص من قيمة طاقة الترابط كما ذكرنا. إنَّ الحدود الثلاثة السابقة تُعتبر حدوداً كلاسيكية.

– الحد الرابع يُسمى بحد الطاقة اللاتماثليّة، وينتج هذا الحد من اختلاف عدد البروتونات والنيوترونات في النواة، حيثُ يؤدي هذا الاختلاف لتقليل من استقرارية النواة وبالتالي أنقاص من قيمة طاقة الترابط الكليّة لها، لذا يُضاف هذا الحد أيضاً بإشارة سالبة إلى معادلة طاقة الترابط، ويكتب هذا الحد كما يلي:

$$E_{AS} = a_{AS}\left(\frac{N-Z}{A}\right)^2 = a_{AS}\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2 \tag{8}$$

حيثُ $E_{AS}$ الطاقة اللاتماثلية و $a_{AS}$ معامل التناسب للطاقة اللاتماثلية.

– الحد الخامس يُسمى بحد طاقة التزاوج، أضيف هذا الحد لأنَّ طاقة الترابط لا تتوقف على عدد النيوكليونات فقط بل وعلى زوجيّة أو فرديّة هذا العدد، فقد وجد بأنَّ أكثر العناصر استقراراً في الطبيعة هي العناصر التي يكون فيها $A$ زوجياً و $N$ و $Z$

زوجيان، والتي تُسمى بالنوى الزوجيّة ـ زوجيّةEven-Even، وأقلها استقراراً هي العناصر التي يكون فيها $A$ زوجيّاً و $N$ و $Z$ فرديان، والتي تُسمى بالنوى الفرديّة – فرديّة Odd-Odd

والحالة الوسطى هي التي يكون فيها $A$ فردياً ( $N$ زوجي و $Z$ فردي أو العكس) وتُسمى هذه النوى بالنوى الفرديّة أو النوى الفرديّة – زوجيّة Odd-A، وعدد هذا النوى ما يقارب المئة نواة موجودة في الطبيعة.

وبناءً على ذلك قام العالم فيرميFermi بإدخال عامل تصحيح يُضاف لطاقة الترابط والذي يأخذ القيم التالية:

عندما يكون $A$ زوجيّاً و $N$ و $Z$ زوجيان يضاف الحد $\delta = +a_p A^{-3/4}$ وبالتالي يزيد من طاقة الترابط وذلك كون النيوكليونات مُقترنة مع بعضها.

عندما يكون $A$ زوجيّاً و $N$ و $Z$ فرديان يضاف الحد $\delta = -a_p A^{-3/4}$ وبالتالي ينقص من طاقة الترابط.

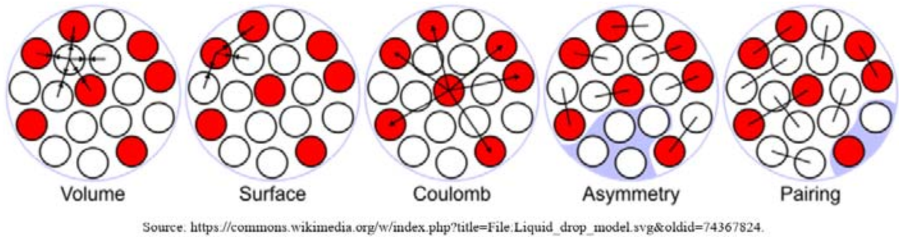
عندما يكون $A$ فردياً لا يأخذ هذا الحد أي قيمة $\delta = 0$ وهي الحالة الوسطى بين الحالتين السابقتين، حيثُ لا يكون لهذا الحد أيّة مُساهمة في طاقة الترابط. يُمكن كتابة هذا الحد بشكلٍ مُختصرٍ كما يلي:

$$\delta = (\pm, 0) a_p A^{-3/4} \qquad (9)$$

حيثُ $\delta$ هو حد طاقة التزاوج و $a_p$ معامل التناسب لطاقة التزاوج. ويَظهر توضيح للحدود المذكورة سابقاً في الشكل (1). وتأخذ المعادلة النصف تجريبية للكتلة بناءً على الحدود السابقة الشكل التالي:

$$EB = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{AS} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta \qquad (10)$$

ومن أهم الطرق المستخدمة لحساب قيم المعاملات في المعادلة النصف تجريبية للكتلة هي طريقة التربيعات الصغرى Least Square Method.




الشكل (1): توضيح لحدود العلاقة نصف التجريبيّة لطاقة الترابط في نموذج قطرة السائل.

## 5. طريقة التربيعات الصغرى:Least squares method

تُعتبر طريقة التربيعات الصغرى طريقة قياسية(معيارية) من أجل إيجاد الحل لمجموعة معادلات تمتلك أكثر من مجهول. وهذا يسمح لنا باستخدام هذهِ طريقة لتحديد قيم المعاملات في الصيغ النظرية عن طريق تناسبها(مطابقتها) مع القيم التجريبية (WELLS, P. V., 2005) ، حيثُ يكون التناسب أفضل ما يمكن عندما يكون مجموع مربعات الفروق ما بين القيم التجريبية والنظرية أصغرياً، كما يلي (WELLS, P. V., 2005) :

$$\chi^2 = \sum \left( y_i - f\,(x_i) \right)^2 \qquad (11)$$

حيث $f(x_i)=\sum_{k=0}^{k=j} a_k x_i^k$ هو كثير حدود و $a_k$ هي معاملات كثير الحدود. بما أنَّ الدالة $\chi$ تابعة لعدة متحولات، فإنها تبلغ قيمة قصوى محلية في النقطة التي تنعدم فيها جميع مشتقاتها الجزئية من المرتبة الأولى، أي عندما تتحقق المعادلات التالية:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_0}=0,\frac{\partial \chi^2}{\partial a_1}=0,\frac{\partial \chi^2}{\partial a_2}=0,...,\frac{\partial \chi^2}{\partial a_k}=0 \qquad (12)$$

تُرتَّب هذه الجملة من المعادلات والتي عدد مجاهيلها يساوي عدد معادلاتها بالشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^j \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{j+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^j & \sum x_i^{j+1} & \sum x_i^{j+2} & \cdots & \sum x_i^{2j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum(x_i y_i) \\ \sum(x_i^2 y_i) \\ \vdots \\ \sum(x_i^j y_i) \end{bmatrix} \qquad (13)$$

وبحل جملة هذهِ المعادلات نحصل على قيم المعاملات $a_0,a_1,a_2,...,a_j$ وبتعويضها في كثير الحدود $f(x_i)$ نحصل على كثير الحدود المطلوب.

## 6. الأيزوسبين: Isospin

اقترح العالم هايزنبرغ Heisenberg هذهِ الفكرة عام 1932 حيثُ اعتبر البروتونات والنيوترونات جسيمات متماثلة سماها النيوكليونات، وافترض بأنَّ الفرق الصغير جداً بين الكتلتين ناتج عن التأثير الكولوني الذي تتمتَّع به البروتونات. لذا فإنَّ النترونات والبروتونات تمثل حالتين مختلفتين لحالة واحدة هي النيوكليون وسمى هذا الفراغ بالأيزوسبين، ويرافق هذا الفراغ مؤثِّر الأيزوسبين الذي نرمز لهُ بالرمز $\hat{T}$ ويأخذ القيمة الخاصة التالية(Suhonen J., 2005):

$$T=\sqrt{T(T+1)} \qquad (14)$$

إنَّ جبر المؤثرات في الفراغ الأيزوسبيني يُطوَّر كما في حالة السبين حيث يأخذ مؤثِّر الأيزوسبين الشكل التالي(Suhonen J., 2005):

$$T = \frac{1}{2}\tau \tag{15}$$

حيث $\tau$ مصفوفة باولي الأيزوسبينية، وبناءً عليهِ فإنَّ لفراغ الأيزوسبين (أو فراغ الشحنة) من أجل النيوكليون بعدين شأنه في ذلك شأن فراغ السبين. ويأخذ المسقط الثالث $T_3$ للأيزوسبين قيمتين فقط من أجل النيوكليونات هي(Sulistyani, 2019):

$$T_3 = \frac{1}{2}\tau_3 = \pm\frac{1}{2} \tag{16}$$

وتكون القيمة الخاصة للنيوكليون وفقاً لتمثيل ديراك على النحو $\left|T,T_3\right\rangle$ حيثُ تكون القيمة الخاصة للبروتون $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ في حين تكون القيمة الخاصة للنيوترون على النحو $\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$.

يُمكن تعميم فكرة الأيزوسبين من أجل حالة نواة تمتلك Z بروتون و N نيوترون حيثُ يكون لها العدد الكتلي A=Z+N، في هذهِ الحالة فإنَّ المركبة الثالثة للأيزوسبين تضاف جبرياً لكل نيوكليون(للبروتونات والنترونات) لنحصل على هذهِ المركبة للنواة ككل، كما يلي(Sulistyani, 2019):

$$T_3 = \sum_i t_{i3} = \sum_i \left(t_{p3} + t_{n3}\right) = \frac{Z}{2} - \frac{N}{2} = -\frac{1}{2}\left(N - Z\right) = -\frac{1}{2}\left(A - 2Z\right) \tag{17}$$

وكما هو معلوم لا يمكن أن تتجاوز قيمة المركبات قيمة الشعاع، لذا يجب أن تكون قيمة شعاع الأيزوسبين على النحور (Sulistyani, 2019):

$$T \geq \left|\frac{N-Z}{2}\right| \qquad (18)$$

تُحسب القيمة المتوقعة لنيوكليونين متفاعلين من العلاقة المُعرِّفة للأيزوسبين الكلّي $T$ الذي يساوي المُحصلة المُتجهاتيّة لأيزوسبيني كلٍ من النيوكليونين المُتفاعلين كما يلي:

$$\vec{T} = \vec{t_a} + \vec{t_b} \qquad (19)$$

حيث $t_a, t_b$ أيزوسبيني النيوكليونين المتفاعلين. وبتربيع طرفي العلاقة السابقة نَحصل على:

$$T^2 = t_a^{\,2} + t_b^{\,2} + 2t_a t_b \qquad (20)$$

وباعتبار $t_a = t_b = \frac{1}{2}$ تكون القيمة المتوقعة لـ $t_a t_b$ هي:

$$\langle t_a t_b \rangle = \frac{T(T+1) - t_a(t_a+1) - t_b(t_b+1)}{2} = \frac{2T(T+1)-3}{4} \qquad (21)$$

وبما أنَّ الأيزوسبين محفوظ بالنسبة للتفاعلات القوية(والذي يتوافق مع كون القوى النووية متماثلة) لذا يُمكن أضافة حد يتعلَّق بالأيزوسبين ضمن علاقة طاقة الترابط(Sulistyani, 2019)، وبالتالي يكون الحد الذي يُمكن أضافته للمعادلة نصف التجريبية للكتلة والمعطاة بالمعادلة(10) يأخذ الشكل التالي:

$$\langle \tau_a \tau_b \rangle = 2T(T+1) - 3 \qquad (22)$$

### 7. نموذج الجسيم المفرد:Single Particle Model

يفُترض هذا النموذج بأنَّ نيوكليونات النواة من نوعٍ مُحدد(بروتونات أو نيوترونات) تقترنُ في الحالة الأساسيّة مع بعضها على شكل أزواج لتُعطي عزماً زاويّاً كليّاً وعزماً مغناطيسيّاً مُساوياً للصفر، وبالتالي تُشكِّل هذهِ النيوكليونات المُقترنة قلباً مُغلقاً. ووفقاً لهذا فإنَّ العزم الزاوي الكلّي والأيزوسبين للنَوى الزوجيّة ـ زوجيّة يساوي الصفر وهذا

ما نلاحظه في الطبيعة، في حين تَعود خصائص النَوى فرديّة للنيوكليون غير المُقترن معَ غيره من النيوكليونات( Nigam B.P., 1967 ).

## 8. الحسابات والنتائج:Calculations and Results

تمَّ أجراء الحسابات لمئة نواة مُستقرة فردية (فردية – زوجية وزوجية – فردية) تقع في مجالات مُختلفة (خفيفة – متوسطة – ثقيلة) وهي أغلب النوى الفردية المستقرة الموجودة في الطبيعة.

### 1.8. أيجاد قيم معاملات المعادلة نصف التجريبية للكتلة قبل أضافة الحد الأيزوسبيني:

اعتماداً على طريقة التربيعات الصغرى، حيثُ يكون التناسب أفضل ما يمكن بالنسبة لمعادلة طاقة الترابط المعطاة بالعلاقة (10) عندما يكون مجموع مربعات الفروق ما بين القيم التجريبية والنظرية أصغرياً، على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \chi}{\partial a_V} &= -2\sum_i A_i \left(y_i - E_{B_{th}}(Z_i, A_i)\right) = 0 \\
\frac{\partial \chi}{\partial a_S} &= 2\sum_i A_i^{2/3} \left(y_i - EB_{th}(Z_i, A_i)\right) = 0 \\
\frac{\partial \chi}{\partial a_C} &= 2\sum_i \frac{Z_i (Z_i - 1)}{A_i^{1/3}} \left(y_i - EB_{th}(Z_i, A_i)\right) = 0 \\
\frac{\partial \chi}{\partial a_{AS}} &= 2\sum_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i} \left(y_i - EB_{th}(Z_i, A_i)\right) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

وبتعويض المعادلة(23) في المعادلة(10) نحصل على المعادلة المصفوفية التالية:

$$\begin{bmatrix} a_V \\ a_S \\ a_C \\ a_{AS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}^{-1} \tag{24}$$

حيثُ تعطى قيم عناصر المصفوفة $[b]$ كما يلي

$$\left.\begin{aligned} & b_{11} = \sum_i A_i^2 \ , b_{12} = b_{21} = -\sum_i A_i^{5/3}, \ \ b_{13} = b_{31} = -\sum_i Z_i (Z_i - 1) A_i^{2/3} \\ & b_{14} = b_{41} = -\sum_i (A_i - 2Z_i)^2 , b_{22} = \sum_i A_i^{4/3} , b_{23} = b_{32} = \sum_i Z_i (Z_i - 1) A_i^{1/3} \\ & b_{24} = b_{42} = \sum_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} , b_{33} = \sum_i \frac{Z_i^2 (Z_i - 1)^2}{A_i^{2/3}} \\ & b_{34} = b_{43} = \sum_i \frac{Z_i (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} , b_{44} = \sum_i \frac{(A_i - 2Z_i)^4}{A_i^2} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

وتُعطى قيم عناصر المصفوفة $[c]$ كما يلي:

$$c_1 = \sum_i y_i A_i \ , c_2 = -\sum_i y_i A_i^{2/3} \ , c_3 = -\sum_i y_i \frac{Z_i (Z_i - 1)}{A_i^{1/3}} \ , c_4 = -\sum_i y_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i} \tag{26}$$

وبحل المعادلة المصفوفية (24) وذلك بعدَ تعويض قيم العناصر المعطاة في المعادلات(25) و(26) بالاستعانة بكود تمَّ تصميمه لهذا الغرض باستخدام البرنامج الشهير MATLAB ، فنحصل على قيم المعاملات $a_V , a_S , a_C , a_{AS}$ والتي تُعطى بواحدةMeV كما يلي:

$$a_V = 15.8838, \ a_S = 18.1220, \ a_C = 0.7279, \ a_{AS} = 23.2012$$

والتي تُعتبر مجموعة جديدة من قيم المعاملات الخاصة بالنوى الفردية.

**2.8. أيجاد قيم معاملات المعادلة نصف التجريبية للكتلة بعدَ أضافة الحد الأيزوسبيني:**

بعدَ أضافة الحد الأيزوسبيني المعطى بالمعادلة (22) نضيف لجملة المعادلات (23) المعادلة التالية:

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_T} = -2\sum_i f\ (T)\left(y_i - EB_{th}(Z_i, A_i)\right) = 0 \tag{27}$$

وبالتالي تصبح المعادلة المصفوفية(24) كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_V \\ a_S \\ a_C \\ a_{AS} \\ a_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}^{-1} \tag{28}$$

حيثُ تعطى قيم عناصر المصفوفة $[b]$ بالشكل التالي:

$$\left.\begin{array}{l}
b_{11} = \sum_i A_i^2\ , b_{12} = b_{21} = -\sum_i A_i^{5/3},\ \ b_{13} = b_{31} = -\sum_i Z_i (Z_i - 1) A_i^{2/3} \\
b_{14} = b_{41} = -\sum_i (A_i - 2Z_i)^2\ , b_{15} = b_{51} = \sum_i A_i \left[2T\ (T+1) - 3\right] \\
b_{22} = \sum_i A_i^{4/3},\ \ b_{23} = b_{32} = \sum_i Z_i (Z_i - 1) A_i^{1/3}\ , b_{24} = b_{42} = \sum_i \dfrac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} \\
b_{25} = b_{52} = -\sum_i A_i^{2/3} \left[2T\ (T+1) - 3\right],\ b_{33} = \sum_i \dfrac{Z_i^2 (Z_i - 1)^2}{A_i^{2/3}} \\
b_{34} = b_{43} = \sum_i \dfrac{Z_i (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{4/3}}\ , b_{35} = b_{53} = -\sum_i \dfrac{Z_i (Z_i - 1)^2}{A_i^{1/3}} \left[2T\ (T+1) - 3\right] \\
b_{44} = \sum_i \dfrac{(A_i - 2Z_i)^4}{A_i^2}\ \ , b_{45} = b_{54} = -\sum_i \dfrac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i} \left[2T\ (T+1) - 3\right] \\
\qquad\qquad b_{55} = \sum_i \left[2T\ (T+1) - 3\right]^2
\end{array}\right\} \tag{29}$$

وتُعطى قيم عناصر المصفوفة $[c]$ كما يلي:

$$c_1=\sum_i y_i A_i\ ,\ c_2=-\sum_i y_i A_i^{2/3}\ ,\ c_3=-\sum_i y_i \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{1/3}}\ ,\ c_4=-\sum_i y_i \frac{(A_i-2Z_i)}{A_i} \qquad c_5=-\sum_i\left[2T(T+1)-3\right]y_i \quad (30)$$

وبحل المعادلة المصفوفية(28) وذلك بعدَ تعويض قيم العناصر المعطاة في المعادلات(29) و(30)، فنحصل على قيم المعاملات $a_V\ ,a_S\ ,a_C\ ,a_{AS}\ ,a_T$ والتي تُعطى MeV على النحو التالي:

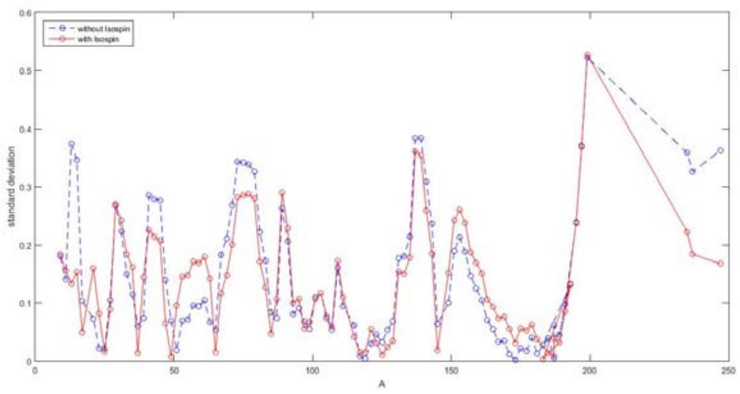
$$a_V=16.8290,\ a_S=22.0231,\ a_C=0.7770,\ a_{AS}=25.0149,\ a_T=8.3892$$

– قُمنا بحساب الانحراف المعياري بين قيم طاقة الترابط المحسوبة لدينا والقيم التجريبية(Bassima M. Mashkour, 2019) من أجل خمس

وثلاثين نواة فردية – زوجية مستقرة، حيثُ استخدامنا علاقة الانحراف المعياري التالية:

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[E^{\,i}_{B(theo.)}-E^{\,i}_{B(\exp.)}\right]^2} \quad (31)$$

وجدنا بأنَّ قيمة الانحراف المعياري من أجل هذه النوى بدون أضافة حد الأيزوسبين هي $\sigma=1.831(Mev)$، ووجدنا قيمة الانحراف المعياري بعد أضافة حد الأيزوسبين من أجل هذه النوى هي $\sigma=1.662(Mev)$، أي أنَّ أضافة الحد الأيزوسبيني للعلاقة النصف تجريبية للكتلة يخفِّض قيمة الانحراف المعياري. ويَظهر في الشكل(2) توزُّع قيم الانحراف المعياري للنوى المَحسوبة لدينا قبل وبعد أضافة حد الأيزوسبين بالاعتبار بدلالة العدد الكتلي.




الشكل (2): توزُّع قيم الانحراف المعياري للنوى المَحسوبة لدينا قبل أضافة حد الأيزوسبين (الخط المنقط) وبعد أضافة حد الأيزوسبين (الخط المتصل) بدلالة العدد الكتلي.

وعندَ مقارنـة قيمـة الانحـراف المعيـاري المَحسـوبة لـدينا مـع قـيم الانحـراف المعيـاري لدراسات سابقة، وجدنا بأنَّ القيمة المحسوبة لدينا بعدَ أضافة الحد الأيزوسبيني أفضل من القيم المحسوبة في الدراسة المذكورة في المراجع

(Deliyergiyev, 2018; SAMANTA, 2005; Vahid1, 2017) والتي اعتمدت على طرق وتقريبات مختلفة، كما أنَّها أفضل من القيم المحسوبة في المرجع

(Pinedo-Vega.et.al., 2017) والتي أنجزت باستخدام معاملات استنتجت من قبل العلماء Evans و Arya وباستخدام طريقةUAEN وتَظهر هذهِ المقارنات في الجدول (1). كما وجدنا بأنَّ قيمـة الانحـراف المعيـاري المَحسـوبة لـدينا أفضـل مـن الدراسـة المذكورة فـي المرجـع(Kirson, 2008) والتـي اعتمدت علـى أضـافة حـدود مختلفـة للمعادلـة نصـف التجريبيـة للكتلـة والتـي هـي علـى الترتيـب، حـد التبـادل الكولـوني، حـد فيغنـر، حـد التنـاظر السـطحي، حـد التـزاوج، حـد التقوس(الانحنـاء) والحـد الطبقـي و

بتأثير أضافة جميع الحدود السابقة. لذا نلاحظ بأنَّ أضافة حد التأثير الأيزوسبيني له أهمية كبيرة مقارنة بإضافة حدود أخرى. وتَظهر هذهِ المقارنات في الجدول (2).

الجدول (1): مقارنة بين قيمة الانحراف المعياري المَحسوبة لدينا مع قيم الانحراف المعياري لدراسات سابقة

| Ref. | (SAMAN (TA, 2005 | (SAM ANTA, (2005 | (Vahid1, (2017 | (Deliye rgiyev, (2018 | (Pinedo - Vega.et .al., 2017) UAEN | (Pinedo - Vega.et .al., 2017) Arya | (Pinedo-Vega.et. al., 2017) Evans | Present Work Without isospin | Present Work With isospin |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma(MeV)$ | 4.711 | 3.888 | 3.795 | 1.931 | 3.070 | 2.729 | 2.412 | 1.831 | 1.662 |

الجدول (2): مقارنة بين قيمة الانحراف المعياري المَحسوبة لدينا مع قيم الانحراف المعياري للمرجع(Kirson, 2008)

| term | Exchange Coulomb | Wigner | Surface symmetry | Pairing | Curvature | Shell effects | All terms | Present Work Without iso. | Present Work With iso. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma(MeV)$ | 2.144 | 1.754 | 2.121 | 1.819 | 1.819 | 2.389 | 1.620 | 1.831 | 1.662 |

## 9. الخاتمة:Conclusion

قُمنا بالاستعانة بكود تمَّ تصميمه باستخدام البرنامج الشهير MATLAB بحساب قيم المعاملات الأربعة للعلاقة النصف تجريبية للكتلة والتي كانت كما يلي: $a_V = 15.8838,\ a_S = 18.1220,\ a_C = 0.7279,\ a_{AS} = 23.2012$ وذلك من أجل

مئة نواة مستقرة تمتلك عدد كتلي فردي (النوى الزوجية – فردية والنوى الفردية – زوجية) مستخدمين طريقة التربيعات الصغرى.

كما قمنا بإضافة حد آخر للعلاقة النصف تجريبية للكتلة يتعلَّق الأيزوسبين $a_T$ مستعينين بنموذج الجسيم المفرد. وقمنا بإيجاد قيم معاملات العلاقة نصف التجريبيّة للكتلة بعد أضافة هذا الحد الجديد، والتي كانت كما يلي:

$$a_V = 16.8290,\ a_S = 22.0231,\ a_C = 0.7770,\ a_{AS} = 25.0149,\ a_T = 8.3892$$

وجدنا بأنَّ أضافة الحد الأيزوسبيني للعلاقة النصف تجريبية للكتلة يخفِّض من قيمة الانحراف المعياري بين قيم طاقات الترابط للنوى المحَسوبة لدينا والقيم التجريبية.

وعندَ مقارنة قيم طاقات الترابط للنوى المدروسة مع قيم دراسات سابقة وجدنا بأنَّ القيم المَحسوبة لدينا أفضل من القيم المَحسوبة في هذهِ الدراسات.

يُمكن اختبار أضافة الحد الأيزوسبيني للعلاقة النصف تجريبية للكتلة من أجل النوى التي تمتلك عدد كتلي زوجي، وعندها يتوجب أجراء الحسابات بإضافة حد التزاوج، وإيجاد طريقة لمعرفة أيزوسبين النيوكليونات المتفاعلة.

## References

Nigam, B.P., (1967). Nuclear Physics Theory and Experiment.JOHN WILEY, 629.

Bassima M. Mashkour, M. (2019). Study Attenuation Ability of γ-Rays Energies in Spectrum of Ra-226 Radioactive Isotope for Shields Consisting of Al and Cu Layers. Academic J. for Engineering and Science, 60-68.

Deliyergiyev, S. C., (2018). Modification of the nuclear landscape in the inverse problem framework using the generalized Bethe–Weizs¨acker mass formula. International Journal of Modern Physics E, 27(2), 1850015-1850011-1850015-1850053.

Suhonen. J., (2005). From Nucleons to Nucleus. Springer, U.S.A (1st ed), 645.

Kirson, M. W. (2008). Mutual influence of terms in a semi-empirical mass formula. Science Direct, Nuclear Physics A, 798 29–60.

Leipzig, V. C., Von C. F., (1935). Weizseker in Leipzig., 431-458.

Norman, D., C., (2005). Models of the Atomic Nucleus. Springer, U.S.A, 291.

Pinedo-Vega.et.al., J. L. (2017). Semi-empirical Nuclear Mass Formula: Simultaneous Determination of 4 Coefficients. Asian Journal of Physical and Chemical Sciences, 1(2), 1-10.

SAMANTA, P. R. C. C. (2005). MODIFIED BETHE WEIZSACKER MASS FORMULA WITH ISOTONIC SHIFT AND NEW DRIPLINES. Modern Physics Letters A, 20(21), 1605-1618.

Sulistyani, S. A., (2019). The Study of Modified Semi-Empirical Mass Formula (SEMF) by Considering Isospin Effects in Liquid Drop Model. PROC.INTERNAT.CONE.SCI.ENGIN., 2, 153-160.

Vahid1, M. M. A. (2017). Estimation of Semi-Empirical Mass Formula Coefficients. SciencePC, Nuclear Science, 2(1), 11-15.

WELLS, P. V., (2005),The Least Squares Approximation. UNB, 79.

## Development of a Semi-Empirical Mass Formula by Adding an Isospin Term

**Nawras Ghazi Alhoulami**

**Faculty of Science, Al Furat University, Deir-ez-Zor, Syrian Arab Republic.**

**E-mail: nawrasalhoulami@alfuratuniv.edu.sy**

**Abstract**

We find a new set of Semi-Empirical Mass-Formula coefficients which is $a_V, a_S, a_C, a_{AS}$ for nuclei with odd mass number using the least squares fitting method, and we have also added another term for the Semi-Empirical Mass Formula related to isospin $a_T$ using the single-particle model.

When calculating the value of the standard deviation between the values of the binding energies of our calculated nuclei and the experimental values before and after adding the isospin term, we found that adding the isospin term to the Semi-Empirical Mass Formula lowers the value of the standard deviation.

And when comparing the values of the binding energies of our calculated nuclei with the values of previous studies, we found that our calculated values are better than the values calculated in these studies.

**Keywords:** Semi-empirical mass formula, Binding energy, isospin, least squares fitting method